Лк №1
07.02.06

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович

Основы теории искуственного интеллекта

учебник - Бондаренко, Шабанов-Кушнаренко. Теория интеллекта.

Раздел 1. Математика, физика и техника интеллекта

Тема 1.1. Предмет теории интеллекта

Изобретение в конце 17 столетия паровой машины дало начало первой научно-технической революции, в результате которой достигнуто многократное усиление физических возможностей людей, за счет использования механизмов и машин. в середине 20 столетия были созданы универсальные цифровые вычислительные машины, которые стали двигателем второй научно-технической революции. ее результатом явилось усиление интеллектуальных возможностей людей, за счет использования информационной техники. технические устройства и системы, усиливающие интеллектуальные возможности человечества, называются *искуственным интеллектом*.

интеллект человека и других созданных природой интеллектуальных систем называется естественным интеллектом.

д/з №1:

(завести для д/з отдельную тетрадь)

привести примеры достижения первой научно-технической революции (усиление физических возможностей).

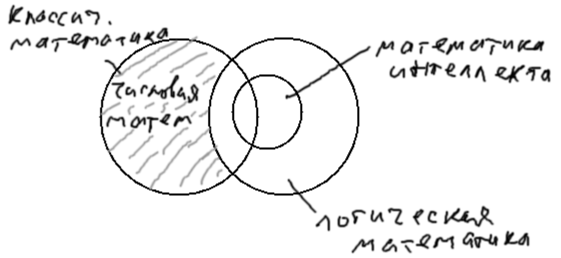
варианты решения: рычаг, ветряная мельница, паровая машина, паровоз, электрическая машина, атомная электростанция, космический корабль, самолет, автомобиль, станки.

д/з №2:

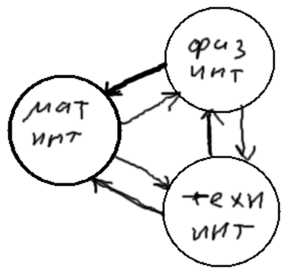
привести примеры достижений второй научно-технической революции

варианты решения: телеграф, телефон, радио, телевизор, видеомагнитофон, ЭВМ, интернет, программные продукты (Windows, и т.п.), экспертные системы.

первая научно-техническая революция направлена на познание внешнего (объективного) мира, вторая - внутреннего (субъективного) мира человека. родоначальником современных представлений об интеллекте является Декарт, живший в первой половине 17 века. первая научно-техническая революция стимулировала быстрое развитие физики внешнего мира и классической математики (в основном числовой), которые стали ее научным фундаментом. прогрессу второй научно-технической революции призваны содействовать порождаемые ею физика и математика информационных процессов (не числовой, а логической природы). физика информационных процессов называется физикой интеллекта или физикой внутреннего мира, математика информационных процессов - математикой интеллекта или теорией интеллекта. родоначальником теории интеллекта является Лейбниц, живший во второй половине 17 века. теория интеллекта направлена на познание природы интеллекта. теория интеллекта входит в состав логической математики.



математика интеллекта - это та часть логической математики, которая ориентирована на решение задач информатизации. математика интеллекта практически используется в физике и технике интеллекта. физика и техника интеллекта выдвигает перед математикой интеллекта новые задачи.



задача физики интеллекта состоит в математическом описании естественных информационных процессов, наблюдаемых в природе, и искуственных информационных процессов, создаваемых техникой интеллекта.

теория интеллекта разрабатывает новый формальный язык и математические методы, необходимые для такого описания. вместе взятые, физика и математика интеллекта образуют *анализ интеллекта*, который является научным фундаментом и инструментом в деле совершенствования существующих и разработке новых систем искуственного интеллекта.

д/з №3:
привести примеры объектов физики интеллекта
варианты решения: зрение, слух, восприятие, оценка ситуации, принятие решений, язык, речь, мышление, внимание, узнавание, сознание, воля, творчество.

д/з №4:
привести пример объектов техники интеллекта
варианты решения: электронные схемы ЭВМ, программы для ЭВМ, базы данных, базы знаний, продукционная система, интеллектуальные агенты, фреймы, семантические сети, иерархические системы, динамические системы, средства защиты информации.

научное направление, ставящее своей задачей изучение естественного интеллекта с целью использования полученных знаний при совершенствовании искуственного интеллекта, называется бионикой интеллекта. для дела совершенствования искуственного интеллекта важна задача математического описания интеллекта человека, любых иных видов естественного интеллекта.

д/з №5:
привести примеры объектов бионики интеллекта.
варианты ответов: преобразование светового излучения в цвет органом зрения человека, преобразование текста в его смысл, знания эксперта, способность человека оценивать ситуации, способность человека составлять программы для ЭВМ, способность человека играть в шахматы, преобразование звука в слуховое ощущение, способность человека отвечать на вопросы, способность человека переводить текст с одного языка на другой.

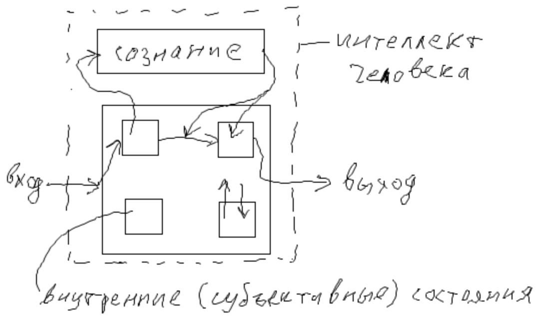
не менее важна задача формального описания искуственного интеллекта, который тоже нуждается в физико-математическом анализе. известны три подхода к изучению интеллекта: функциональный, интроспективный и материальный.

функциональный подход заключается в анализе наблюдаемого извне поведения интеллектуальной системы.

интроспективный (субъективный) подход заключается в наблюдении интеллектуальной системы изнутри.

Лк №2
07.02.13

схема интроспективного подхода:



психические процессы представляют собой преобразование различных состояний интеллектуальной системы друг в друга.

психофизические процессы представляют собой преобразование состояний внешнего мира, информация о которых поступает в интеллектуальную систему, в ее внутренние состояния и обратно.

материальный подход состоит в том, что исследуется структура материального носителя интеллекта.

связь между подходами выражается в виде треугольника анализа интеллекта:

идеальные подходы, используемые совместно, образуют комбинированный подход к изучению интеллекта. различают частные и общую теории интеллекта. частные теории интеллекта изучают отдельные механизмы конкретных интеллектуальных систем и конкретные интеллектуальные системы.

д/з №6:

привести примеры частных теорий интеллекта

варианты ответа: наиболее продвинутая частная теория интеллекта - теория зрения. также есть теория слуха, теория узнавания, теория восприятия, теория понимания, теория оценивания. теория человеческого интеллекта, теория машинного интеллекта.

общая теория интеллекта изучает то общее, что содержится во всевозможных интеллектуальных системах (логику).

д/з №7:

привести примеры разделов общей теории интеллекта

варианты ответа: алгебра булевых функций, алгебра отношений, алгебра множеств, алгебра предикатов, алгебра предикатных операций, теория линейных логических преобразований, теория моделей, учение о композиции и декомпозиции - алгебра логических структур, учение об аксиоматических теориях, учение об алгебрах

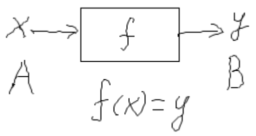
с точки зрения общей теории интеллекта, любая интеллектуальная система представляет собой материальное воплощение некоторой части так называемой универсальной логической алгебры, разработка которой является одной из важнейших задач теории интеллекта. разработка универсальной логической алгебры достигается главным образом за счет алгебраизации логики. источниками идей для алгебраизации логики служат классическая математика, практика интеллектуальной деятельности человека, физика и техника интеллекта, а также собственная логика развития теории интеллекта.

Тема 1.2. Компараторная идентификация

("идентификация методом сравнения")

человек, интеллектуальная деятельность которого изучается, называется испытуемым. математическое описание любого процесса называется его идентификацией. важной задачей физики интеллекта является идентификация интеллектуальной деятельности человека. различают прямую и косвенную идентификацию процессов.

при прямой идентификации на вход идентифицируемого процесса f подаются сигналы x, выбираемые из некоторого множества A, и регистрируются ответные сигналы y на выходе процесса. всевозможные сигналы y образуют множество B.



цель идентификации заключается в получении математического описания функции *f(x)=y*, отображающей множество *A* на множество *B*, которая характеризует ход (поведение) изначального процесса. функция *f* называется <u>характеристической функцией</u> процесса. отличительной особенностью прямой идентификации является то, что входные и выходные сигналы изучаемого процесса доступны для прямого физического наблюдения и измерения.

методом прямой идентификации можно изучать только наблюдаемое извне поведение испытуемого, но не его внутренний субъективный мир.

д/з №2.1:

привести примеры прямой идентификации процессов.

варианты решения: любой классический физический эксперимент, наблюдение за игрой в шахматы, наблюдение за работой вычислительной машины, изучение поведения людей.

однако, для информатизации представляют интерес не только разумное поведение людей, но и те внутренние субъективные состояния и информационные процессы, которые явились причиной этого поведения. внутренние состояния субъективны, они недоступны для внешнего наблюдения. для изучения внутренних состояний испытуемого, метод прямой идентификации не достаточен.

идентификация называется <u>косвенной</u>, если требуется найти характеристическую функцию процесса в условиях, когда входной или выходной сигнал процесса недоступны для непосредственного физического наблюдения. при косвенной идентификации приходится кроме самого процесса математически описывать его неизвестные входные или выходные сигналы.

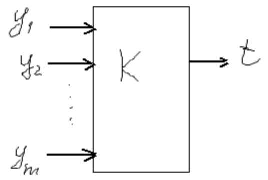
д/з №2.2:

привести примеры косвенной идентификации процесса

варианты решения: нахождение расстояния до корабля в море, не замочив ноги (по длине основания и двум углам при нем определяется высота треугольника); определение высоты египетской пирамиды, предсказание места и времени полного солнечного затмения.

в математике интеллекта разрабатывается и изучается, а в физике и технике интеллекта широко используется компараторная идентификация, являющаяся одним из важных видов косвенной идентификации.

<u>компаратором</u> *K* называется устройство с *n* входами $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и одним выходом *t*. входные сигналы - любые, а выходной сигнал - двоичный (0 или 1). здесь *t* - двоичная реакция компаратора.



$t \in \Sigma$

$\Sigma = \{0,1\}$

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ - внутренние состояния информационной системы.

$y_1 \in B_1, y_2 \in B_2, \ldots, y_m \in B_m$

$B_1, B_2, \ldots, B_m$ - множества внутренних состояний.

д/з №2.3:

привести примеры внутренних состояний информационной системы.

варианты решения:

для человека - ощущения, присутствующие в поле зрения в данный момент времени; цвет и яркость зрительного ощущения в данной точке поля зрения; слуховое ощущение, его громкость и тембр; мысли, эмоции, намерения, оценки, представления, восприятие.

для вычислительной машины - текст или рисунок в файле; программа с некоторым именем; двоичный код в заданном регистре.

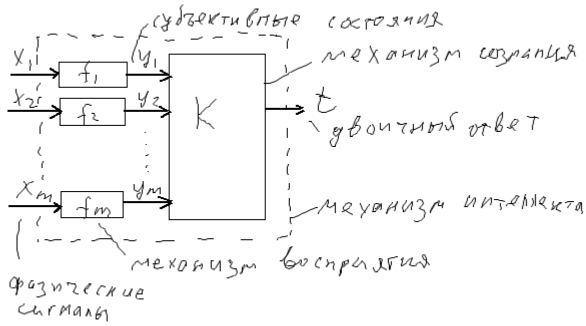
компаратор устанавливает, находятся или нет его входные сигналы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в заданном отношении *K*. если да, то компаратор реагирует сигналом *t* = 1, если нет - сигналом *t* = 0.

д/з №2.4:
привести примеры компараторов.
варианты решения:

для человека - сознание человека, сравнивающее ощущения цветов или звуков на равенство; сознание определяет, является ли один заданный звук громче другого; сознание, устанавливающее предпочтение субъективной оценки одного места работы оценке другого /* кашмар.. не проще ли сказать "сравнение двух мест работы" :)) */; оценке вариантов при выборе мужа, жены, друга, ВУЗа; соответствует ли смысл данного утверждения знаниям о данной ситуации; следует ли заданное математическое утверждение из другого заданного математического утверждения; присущ ли конкретной словоформе заданный падеж; преподаватель принимает экзамен у студентов, необходимо определить, является ли ответ студента правильным.

для вычислительной машины - распознавание языка, на котором написан текст; проверка файлов на наличие вирусов; выражают ли два предложения одну и ту же мысль.

своим поведением компаратор реализует предикат $K(y_1, y_2, \ldots, y_m) = t$, соответствующий отношению *K*, и называемый *предикатом компаратора*. ко входам компаратора подключаются своими выходами идентифицируемые информационные процессы $f_1, f_2, \ldots, f_m$

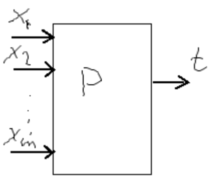


$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ - множество физических сигналов

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ - внутренние состояния объекта P.

если не интересоваться внутренними состояниями, получим следующую схему:



информационные процессы, вместе с подсоединенным к ним компаратором, называются <u>идентифицируемым объектом</u>. символом P обозначим предикат объекта:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = t$$

он выражается (если верить субъективному свидетельству испытуемого) в следующем виде:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = K(y_1, y_2, \ldots, y_m) = K(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_m(x_m))$$

Лк №3
07.02.20

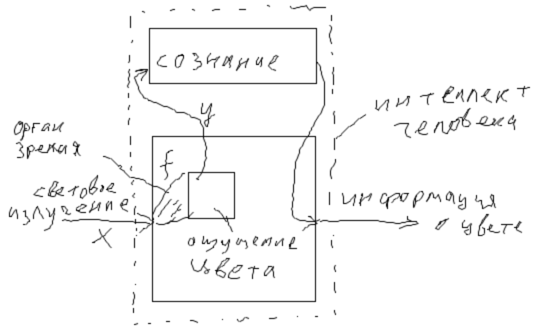
д/з №2.5:
привести примеры идентифицируемого объекта
варианты решения:
человек, устанавливающий, равны или нет цвета двух предъявленных ему излучений.
ЭВМ на атомной электростанции, блокирующая неправильные действия персонала.

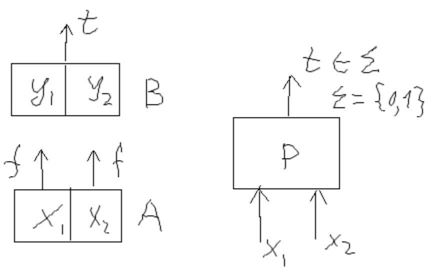
простейшая задача компараторной идентификации заключается в том, чтобы по заданному компаратору и по известным свойствам объекта P математически описать выходные сигналы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ процессов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ и сами эти процессы. более сложные задачи компараторной идентификации возникают когда приходится одновременно рассматривать систему объектов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, связанных друг с другом.

Тема 1.3. метод нулевого прибора

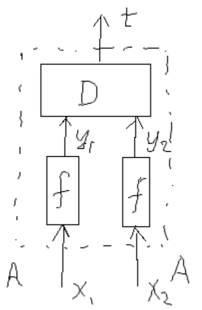
метод нулевого прибора представляет собой наиболее употребительное средство изучения внутренних состояний и преобразований внешних сигналов интеллектуальной системы в ее внутренние состояния. например, внутренними состояниями могут быть цвета, внешними сигналами - световое излучение.

метод нулевого прибора - это частный случай метода компараторной идентификации. рассмотрим этот метод на примере изучения цветового зрения человека. световое излучение, действуя на сетчатку глаза, вызывает в сознании человека ощущение, называемое цветом.





раздел логического анализа, в котором изучается преобразование $f(x) = y$ светового излучения *x* в цвет *y*, осуществляемое зрительной системой человека, называется теорией цветового зрения.



испытуемому предъявляют на полях сравнения световые излучения x_1 и x_2, которые он воспринимает в виде цветов y_1 и y_2. если цвета совпадают друг с другом, то испытуемый должен отреагировать ответом *t=1*, если же не совпадают - то ответом *t=0*. своим поведением испытуемый реализует предикат $P(x_1, x_2) = D(f(x_1), f(x_2))$, называемый цветовым, где $D(y_1, y_2)$ - предикат равенства цветов:

$$D(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & y_1 = y_2 \\ 0, & y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

предикат $D(y_1, y_2)$ характеризует собой действие механизма сознания испытуемого, анализирующего ощущения цвета y_1, y_2 и устанавливающего их равенство или неравенство. функция $f(x) = y$ характеризует собой преобразование объективного светового излучения *x* в субъективный цвет *y*, осуществляемое зрительной системой человека. все сказанное верно если верить свидетельству сознания испытуемого.

опыты на испытуемом показывают, что:

- предикат Р рефлексивен: $\forall x \in A \quad P(x,x)=1$ (или $\forall x \in A \quad P(x,x)$), т.е. если сравниваются два одинаковых излучения, то испытуемый ответит, что они равны.
- предикат Р симметричен: $\forall x_1,x_2 \in A \quad P(x_1,x_2)=1 \Rightarrow P(x_2,x_1)=1$ (или $\forall x_1,x_2 \in A \quad (P(x_1,x_2)=P(x_2,x_1))$), т.е. если одинаковые цвета переставить местами, они все равно останутся одинаковыми.
- предикат Р транзитивен: $\forall x_1,x_2,x_3 \in A \quad P(x_1,x_2)=1, P(x_2,x_3)=1 \Rightarrow P(x_1,x_3)=1$ (или $\forall x_1,x_2,x_3 \in A \quad (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \supset P(x_1,x_3))$).

рефлексивность цветового предиката означает, что одинаковые излучения порождают одинаковые цвета. симметричность означает, что при перестановке излучений местами, равенство цветов не нарушается. транзитивность означает, что если цвета первого и второго излучений равны, а также равны цвета второго и третьего излучений, то цвета первого и третьего излучений также равны.

любой двуместный предикат, обладающий свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется <u>предикатом эквивалентности</u>.

теорема об общем виде предиката эквивалентности:

любой предикат эквивалентности и только предикат эквивалентности можно представить в виде $P(x_1,x_2)=D(f(x_1),f(x_2))$ при подходящем выборе функции $f: A \to B \quad (x_1,x_2 \in A)$ и множества *B*.

характеристическая функция цветового предиката ($f(x)=y$) математически выражает процесс преобразования зрительной системы человека светового излучения в цвет.

Тема 1.4. Теория цветового зрения

в теории цветового зрения вид функции *f*, т.е. закон преобразования светового излучения в цвет, выводится только из анализа двоичных ответов испытуемого. иначе говоря, только из свойств цветового предиката ($P(x_1,x_2)$). для отыскания функции *f* привлекаются дополнительные свойства предиката *P* - аддитивность, однородность, трехмерность и непрерывность.

$$P(x_1,x_2)=1 \Leftrightarrow D(f(x_1),f(x_2))=1 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

1. аддитивность:

$\forall x_1,x_2,x_1',x_2' \in A \quad f(x_1)=f(x_2), f(x_1')=f(x_2') \Rightarrow f(x_1+x_1')=f(x_2+x_2')$ (или $\forall x_1,x_2,x_1',x_2' \in A \quad (P(x_1,x_2) \wedge P(x_1',x_2') \supset P(x_1+x_1',x_2+x_2'))$)

сложение x_1+x_2 достигается совмещением x_1 и x_2 в пространстве. аддитивность цветового предиката означает, что суммы равноцветных излучений равноцветны.

2. однородность:

если на двух полях есть два излучения одного и то же цвета, то если их усиливать или ослаблять в одинаковое число раз, то цвета будут оставаться одинаковыми.

$\forall x_1,x_2 \in A \forall \alpha \in R \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(\alpha x_1)=f(\alpha x_2)$ (или $\forall x_1,x_2 \in A \forall \alpha \in R \quad (P(x_1,x_2) \supset P(\alpha x_1,\alpha x_2))$).

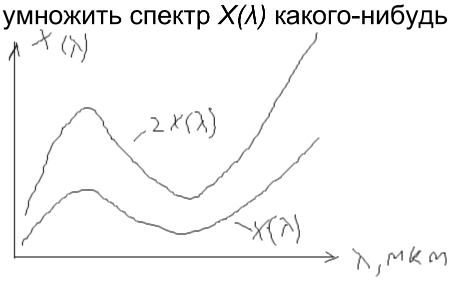
α - действительное число ($\alpha \in R$).

умножение αX излучения $X=X(\lambda)$ на неотрицательное число α достигается изменением его мощности в α раз при сохранении его спектрального состава.

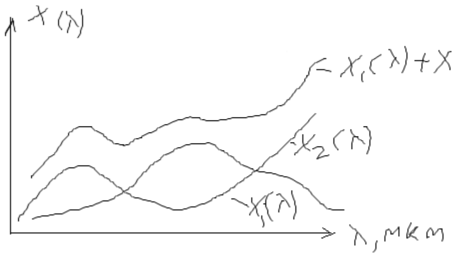
однородность цветового предиката означает, что равноцветные излучения после умножения их на одно и то же число снова будут равноцветными.

д/з №4.1:

умножить спектр *X(λ)* какого-нибудь светового излучения *X* на некоторое число *α*.



д/з №4.2:
сложить спектры каких-нибудь двух световых излучений.



λ - длина волны световых колебаний. *X(λ)* - спектр светового излучения (зависимость его мощности *X* от длины волны *λ*).

$[\lambda_1, \lambda_2]$ - диапазон длин волн световых колебаний. $\lambda_1 = 0.4$ мкм - световые колебания фиолетового цвета. $\lambda_1 = 0.8$ мкм - световые колебания красного цвета. это пределы для человеческого глаза.

умножение излучения на отрицательное число означает его переброску на противоположное поле сравнения.

3. трехмерность:

$\exists a_1, a_2, a_3 \in A \qquad \forall x \in A \qquad f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)$ при единственном выборе чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$.

(или $\exists a_1, a_2, a_3 \in A \qquad \forall x \in A \qquad \exists! \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R \qquad P(x, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)$).

т.е. найдутся такие излучения a_1, a_2, a_3, что умножая их соответственно на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно получить излучение *x*. таким образом, любой цвет однозначно характеризуется тройкой чисел.

световые излучения a_1, a_2, a_3 и их цвета называются <u>основными</u>. их можно выбирать по-разному. в роли основных цветов обычно используют красный, зеленый и синий. трехмерность цветового предиката означает, что смесь $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ основных излучений можно подравнять по цвету к цвету любого излучения *x*, причем при единственном варианте пропорций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

набор чисел $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$ однозначно определяет цвет светового излучения *x*. числа $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$ называются <u>координатами цвета</u> излучения *x* в цветовом пространстве с базисом a_1, a_2, a_3.

4. непрерывность:

принимаем в роли A гильбертово пространство $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$ всех спектров $X(\lambda)$ световых излучений.

при непрерывном изменении светового излучения $X \in L_2[\lambda_1, \lambda_2]$, числа $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$ изменяются непрерывно.

любой аддитивный однородный трехмерный и непрерывный предикат называется <u>трехмерным линейным предикатом</u>.

теорема об общем виде трехмерного линейного предиката эквивалентности:

характеристическая функция $f : L_2[\lambda_1, \lambda_2] \to R^3$ любого трехмерного линейного предиката эквивалентности может быть представлена в виде $y = f(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$, где

$$\alpha_1(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X(\lambda) K_1(\lambda) d\lambda$$

$$\alpha_2(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X(\lambda) K_2(\lambda) d\lambda \qquad (1)$$

$$\alpha_3(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X(\lambda) K_3(\lambda) d\lambda$$

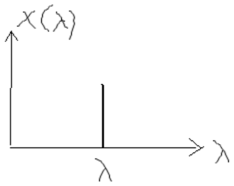
при подходящем выборе функций $K_1(\lambda), K_3(\lambda), K_3(\lambda)$

интегралы вида (1) называются <u>цветовыми</u>. функции $K_1(\lambda), K_3(\lambda), K_3(\lambda)$ называются <u>функциями спектральной чувствительности зрения</u> в базисе a_1, a_2, a_3. их определяют экспериментально. один из возможных способов такого определения называется методом Максвелла.

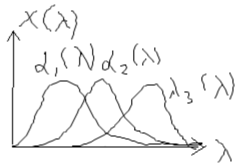
(в виде интегралов можно представить только такие преобразования, которые обладают вышеуказанными четырьмя свойствами).

Лк №4
07.02.27

о методе Максвелла:



берут монохроматическое излучение (в спектре присутствует только одна длина волны) единичной мощности с длиной волны λ, и в специальном эксперименте на испытуемом отыскивают для каждой длины волны λ равноцветную смесь $\alpha_1(x_\lambda)a_1 + \alpha_2(x_\lambda)a_2 + \alpha_3(x_\lambda)a_3$.



в теории цветового зрения доказывается, что при использовании метода Максвелла можно принять $K_1(\lambda) = \alpha_1(\lambda), \qquad K_2(\lambda) = \alpha_2(\lambda), \qquad K_3(\lambda) = \alpha_3(\lambda)$.

найденные из опыта функции спектральной чувствительности зрения $K_1(\lambda), K_2(\lambda), K_3(\lambda)$ усредняют по многим испытуемым. на этой основе получают унифицированные функции спектральной чувствительности зрения (кривые сложения). используют разные системы кривых сложения. их вид зависит от выбора базиса a_1, a_2, a_3. имеется международный стандарт на кривые сложения - это так называемая система RGB. в нем в роли основных использованы монохроматические излучения красного, зеленого и синего цвета. разные варианты кривых сложения получают линейным пересчетом кривых сложения стандартной системы RGB.

д/з №4.3:

указать области возможного применения теории цветового зрения.

варианты ответа: машинная графика, роботы, телевидение, видеотехника, кино, архитектура, текстильная промышленность, светотехника, лакокрасочное производство, медицина, медицинское приборостроение, полиграфия, искусство, распознающие системы.

д/з №4.4:

указать объекты, которые можно изучать по методу нулевого прибора.

варианты ответа: преобразование цвета в яркость, звука в громкость, тембр и высоту тона, преобразование текста в его смысл, приведение предмета к эталону, преобразование предмета в набор признаков, ситуации в ее оценку, пятен краски на бумаге в букву, звука в фонему.

Тема 1.5. Логическая идентификация

- это наиболее общий метод.

к логической идентификации сводятся любые задачи косвенной идентификации.

пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ - идентифицируемые объекты, реализующие некоторые предикаты:

$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$P_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$\ldots$

$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

m - максимальная размерность предикатов.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ - аргументы предикатов.

из экспериментального изучения поведения объектов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ выводятся их характеристические свойства, выражаемые системой логических уравнений:

$$\mathcal{F}_1(P_1, P_2, \ldots, P_n) = 1$$
$$\mathcal{F}_2(P_1, P_2, \ldots, P_n) = 1 \qquad (1)$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{F}_r(P_1, P_2, \ldots, P_n) = 1$$

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_r$ - *предикаты от предикатов*, или *предикаты второй ступени*.

уравнения, связывающие неизвестные предикаты, называются *логическими условиями*.

логические условия (1) называются *аксиомами теории объектов* $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

д/з №5.1:

привести примеры аксиом теории объектов.

варианты ответа:

рефлексивность, симметричность, транзитивность;

теория натурального ряда - вводится некоторое множество N, вводится предикат $Q(x, y)$, $x \in N, y \in N$. $Q(x, y) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = y$. будем задавать предикат Q пятью свойствами (аксиомами):

1. аксиома всюду определенности: $\forall x \in N \exists y \in N Q(x, y)$
2. аксиома однозначности - за каждым числом следует только одно число. $\forall x, y, z \in N(Q(x, y) \wedge Q(x, z) \supset D(y, z))$
3. инъективность (однозначность в обратную сторону). $\forall x, y, z \in N(Q(x, y) \wedge Q(z, y) \supset D(x, z))$
4. аксиома единицы: $\exists!\, y \in N \forall x \in N \neg Q(x, y)$
5. аксиома математической индукции: $\forall M \subseteq N(M(1) \wedge \forall x, y \in N(P(x) \wedge Q(x, y) \supset M(y)) \supset \forall x \in N M(x))$

теория сложения натуральных чисел, теория рациональных чисел, теория действительных чисел, линейная алгебра, булева алгебра.

совокупность истинных высказываний...

аксиомы называются <u>независимыми</u> друг от друга, если ни одну из них невозможно вывести из совокупности остальных. система аксиом, состоящая из независимых аксиом, называется <u>несократимой</u>.

д/з №5.2:

привести примеры несократимых и сократимых аксиом.

варианты ответа:

рефлексивность, симметричность, транзитивность (несократимые); аксиоматика натурального ряда (несократимые).

две системы аксиом называются <u>равносильными</u> друг к другу, если каждую из них можно логически вывести из другой. такие системы взаимозаменяемы, они заменяют одну и ту же теорию.

д/з №5.3:

привести примеры равносильных и неравносильных систем аксиом.

варианты ответа:

первая система:

1. рефлексивность
2. симметричность
3. транзитивность

вторая система:

1. рефлексивность
2. квазитранзитивность:

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in A(P(x_1, x_2) \wedge P(x_3, x_2) \wedge P(x_3, x_4) \supset P(x_1, x_4))$$

интеллект человека формально рассматривают как систему $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ взаимосвязанных объектов $P_1, P_2, ..., P_n$, каждый из которых характеризует один из механизмов интеллекта.

д/з №5.4:

указать какой-нибудь из механизмов интеллекта.

варианты ответа:

зрение, слух, осязание, узнавание, понимание, язык, мышление, сознание, эмоции, воля, критика, воображение, оценивание, творчество, подсознание, умения, знания, совесть, привычки, внимание, идеалы, способности.

набор конкретных (фиксированных) предикатов $(P_1^*, P_2^*, ..., P_n^*)$ (1) аксиомам теории *T* называется <u>моделями теории Т</u>.

аксиомам теории может удовлетворять не одна, а много различных моделей, или ни одной.

система аксиом, для которой не существует ни одной модели, называется <u>противоречивой</u>.

непротиворечивая теория называется <u>полной</u>, если добавление к ней любой независимой от нее аксиомы, делает ее противоречивой.

д/з №5.5:

привести примеры привести примеры полной и неполной теории.

варианты ответа:

рефлексивность, симметричность, транзитивность (неполная).

теория называется <u>однозначной</u>, если ей удовлетворяет единственная модель.

$D(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$

аксиома Лейбница:

$\forall x, y \in A(D(x, y) \sim \forall P \subseteq A(P(x) \sim P(y)))$

$D(x, y) = 1 \Leftrightarrow \forall P \subseteq A(P(x) \sim P(y))$

теория эквивалентности (неоднозначная теория)

теория называется <u>категоричной</u>, если все ее модели изоморфны друг другу.

д/з №5.7:

привести примеры категоричной и некатегоричной теорий.

варианты ответа:

евклидова геометрия (категоричная), арифметика натуральных чисел (категоричная).

запись семейства всех моделей теории *T* в виде некоторой формы называется общим видом модели теории *T*.

д/з №5.8:

привести примеры общего вида модели какой-либо теории.

варианты ответа:

рефлексивность, симметричность, транзитивность: $P(x_1, x_2) = D(f(x_1), f(x_2))$

интегральная теория цвета.

теория линейного функционала. $\eta = f(x)$

аддитивность: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

однородность: $f(\alpha x) = \alpha(f(x))$

Лк №5

07.03.06

общий вид модели получаем в результате решения системы логических уравнений.

д/з №5.9:

привести примеры логических уравнений

варианты решения:

$\forall x \in AP(x) = 1$ (язык кванторов) - для него решением является $P(x) = A(x) \vee c(x)$.

$A \cap P = B$ (язык алгебры множеств). уравнение имеет два параметра - А и В. общее решение - $P = B \cup (\tilde{A} \cap C)$

<u>структурной идентификацией</u> объектов называется такое их экспериментальное и теоретическое изучение, которое завершается формулированием аксиом теории и отысканием общего вида модели

этих объектов.

д/з №5.10:

привести примеры структурной идентификации объектов.

варианты решения:

1. малая теория цветового зрения.

$P(x_1, x_2) = t$ - поведение испытуемого, наблюдающего два световых излучения на полях сравнения.

система аксиом - рефлексивность, симметричность и транзитивность - $\forall x \in A P(x,x) = 1$, $\forall x, y \in A (P(x,y) \supset P(y,x)) = 1$, $\forall x, y, z \in A (P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)) = 1$

$P(x,y) = D(f(x), f(y))$ - все решения.

2. $f(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$

$$\alpha_1(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda^2} x(\lambda) K_1(\lambda) d\lambda$$

$$\alpha_2(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda^2} x(\lambda) K_2(\lambda) d\lambda$$

$$\alpha_3(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda^2} x(\lambda) K_3(\lambda) d\lambda$$

- указанные интегралы - это результат структурной идентификации.

3. ранее упоминался общий вид линейного функционала. $\eta = f(x)$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

общее решение -

$$f(x) = \alpha \cdot x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n$$

параметрической идентификацией объектов называется такое их экспериментальное и теоретическое изучение, которое завершается отысканием конкретных значений параметров общего вида модели этих объектов.

д/з №5.11:

привести примеры параметрической идентификации объектов.

варианты решения:

1. малая теория цветового зрения. $P(x,y) = D(f(x), f(y))$

2. большая теория цветового зрения. нужно определить три функции $K_1(\lambda), K_2(\lambda), K_3(\lambda)$.

3. $f(x) = \alpha \cdot x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n$ - нужен метод по определению вектора α.

аксиоматические теории классической математики и теории интеллекта имеют разную направленность. первые направлены на вывод теорем из аксиом, а вторые - на отыскание общего вида и параметров модели объектов, со свойствами выраженными аксиомами теории.

д/з №5.12:

привести примеры возможной области практического применения модели информационных объектов.

варианты решения:

эргономика (согласование параметров техники с параметрами человека, в частности чтобы техника не оказывала вредного влияния на человека); автоматическая обработка текстов; зрение роботов; телевизор; сканер; поиск научной и деловой информации в интернете; выявление знаний эксперта для экспертных систем; автоматическое реферирование и аннотирование; машинная графика; базы знаний и т.д.

Раздел 2. Предикаты.

Тема 2.1. отношения на пространстве предметов.

входные сигналы, предъявляемые испытуемому в экспериментах, относящихся к теории T, называются предметами теории T. непустое множество U всевозможных предметов теории T называется универсумом предметов теории T.

д/з №2.1.1:

привести примеры универсумов предметов.

варианты решения:

в теории цветового зрения универсумом предметов является множество возможных световых излучений.

пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ - всевозможные места предметов, используемые в экспериментах теории T. они называются предметными переменными теории T.

непустое множество V всевозможных переменных теории T называется универсумом переменных теории T.

$V = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

д/з №2.1.2:

привести примеры универсумов переменных.

варианты решения:

в теории цветового зрения - $V = \{x_1, x_2\}$ - два поля сравнения цветов.

если предмет *a* находится на месте x_i $(i = \overline{1, m})$, то говорят, что переменная x_i принимает значение *a* и пишут $x_i = a$

д/з №2.1.3:

привести пример набора мест, находящихся в определенных состояниях.

варианты решения:

на одном поле - излучение красного цвета a_1, на втором - синего, a_2, т.е. места заполнены.

если $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$ и известно, что $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_m = a_m$, то пишут $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in U^m$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$

пространство U^m в теории T образовано из всевозможных векторов $(x_1, x_2, \dots, x_m)$. число m называется *размерностью пространства* U^m. любое подмножество P пространства U^m называется m-местным отношением, заданным на U^m.

отношение - это знание о состояниях какого-нибудь набора мест. отношение - это универсальное средство формального описания структуры любых объектов, их свойств, связей между ними, действий над ними, любых процессов, происходящих в природе, технике и обществе, в том числе и информационной.

д/з №2.1.4:

записать какое-нибудь отношение в виде множества векторов.

варианты решения:

пусть множество возможных излучений -

$U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

$m = 2$

$P = \{(a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_6, a_6)\}$ - возможные варианты пар излучений на полях сравнения.

т.е. мы знаем, что на полях сравнения могут быть только эти пары излучений.

д/з №2.1.5:

представить какое-нибудь отношение в виде таблицы.

варианты решения:

(с отношением из предыдущего примера)

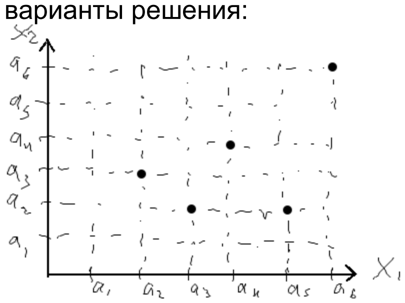
x_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

x_2	a_3	a_2	a_4	a_2	a_6

д/з №2.1.6:

представить какое-нибудь отношение в виде графика.

варианты решения:

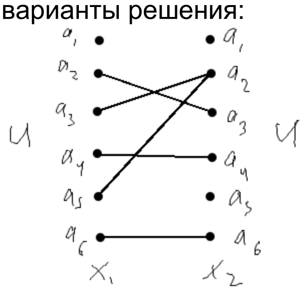


отношение, заданное на конечном универсуме, называется конечным; заданное на бесконечном - бесконечным.

д/з №2.1.7:

представить какое-нибудь отношение в виде неориентированного графа.

варианты решения:



Тема 2.2. Операции над отношениями.

над отношениями как над множествами можно выполнять операции объединения, пересечения и дополнения.

д/з №2.2.1:

образовать объединение каких-нибудь отношений.

варианты решения:

возьмем отношения $P = \{(a,b,c),(b,c,d)\}, Q = \{(a,d,a),(b,c,d)\}$

в результате получаем $P \cup Q = \{(a,b,c),(b,c,d),(a,d,a)\}$

$P \cap Q = \{(b,c,d)\}$

$U = \{a,b,c\}$

$U^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

$P = \{(a,a),(a,b),(c,c)\}$

дополнение отношений $\tilde{P} = \{(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b)\}$

разность отношений: $P \setminus Q = P \cap \tilde{Q}$ (читается как "P без Q").

симметрическая разность отношений: $P - Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$

д/з №2.2.4:

образовать разность каких-нибудь отношений.

д/з №2.2.5:

образовать симметрическую разность каких-нибудь отношений.

д/з №2.2.6:

придумать такие два отношения, чтобы одно включало в себя другое.

вариант решения:

$\{(a,a),(b,c)\} \subseteq \{(a,a),(b,c),(a,c)\}$

Тема 2.3. Предикаты.

любая функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \xi$, отображающая множество U^m в множество $\Sigma = \{0,1\}$ называется m-местным предикатом, заданным на U^m. элементы множества Σ называются логическими. элемент 0 - ложь, элемент 1 - истина.

предикат P называется конечным, если множество U конечно, и бесконечным в противном случае. переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются аргументами предиката P.

пусть $\mathcal{L}$ - множество всех отношений на пространстве U^m, а M - множество всех предикатов на U^m. отношение $P \in \mathcal{L}$ и предикат $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$ называются соответствующими друг другу, если при любых $x_1, x_2, \ldots, x_m \in U$ имеет место соотношение $\mathbb{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{cases} = 1, & (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in P \\ = 0, & (x_1, x_2, \ldots, x_m) \notin P \end{cases}$ (1)

также есть обратное соотношение:

если $\mathbb{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in P$

если $\mathbb{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \notin P$ (2)

правила (1) и (2) устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми отношениями множества $\mathcal{L}$ и всеми предикатами множества $\mathcal{M}$. множество всех векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяющих уравнению $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$, образуют отношение P. предикат $P \in \mathcal{M}$, определяемый правилом (1), называется характеристической функцией отношения $P \in \mathcal{L}$.

д/з №2.3.1:

представить какое-нибудь уравнение в виде отношения.

вариант решения:

пусть универсум состоит из 4 элементов: $U = \{0,1,2,3\}$. множество переменных $V = \{x, y\}$

уравнение $x + y = 3$. чтобы записать отношение P, нужно найти все возможные наборы значений x и y, которые удовлетворяют этому отношению.

$P = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$.

д/з №2.3.2:

записать в виде таблицы предикат, соответствующий какому-нибудь отношению.

вариант решения:

y U

x \ y	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

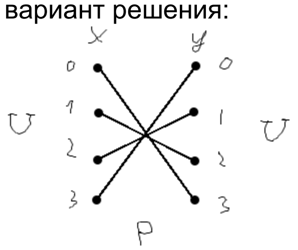
U

P(x,y)

д/з №2.3.3:

записать отношение, соответствующее какому-нибудь предикату.

вариант решения:



Тема 2.4. Выражение предикатов формулами.

дизъюнкцией $\xi \vee \eta$ логических элементов ξ и η называется операция $0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$.

конъюнкцией $\xi \wedge \eta$ логических элементов называется операция $0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$

отрицанием $\bar{\xi}$ называется операция $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$

предикатом узнавания предмета $a \in U$ по переменной x_i, $(i = \overline{1,m})$ называется предикат x_i^a, определяемый условием $x_i^a = \begin{cases} 1, & x_i = a \\ 0, & x_i \neq a \end{cases}$

д/з №2.4.1:
записать какой-нибудь предикат формулой.
вариант решения:
$U = \{0,1,2,3\}$

x \ y	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	0

$P(x,y) = x^0y^3 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 \vee x^2y^2 \vee x^3y^0$

д/з №2.4.2:
вычислить значение какого-нибудь предиката для некоторого набора значений его аргументов.
вариант решения:
$P(0,2) = 0^02^3 \vee 0^12^2 \vee 0^22^1 \vee 0^22^2 \vee 0^32^0 = 1\cdot 0 \vee 0\cdot 1 \vee 0\cdot 0 \vee 0\cdot 1 \vee 0\cdot 0 = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$

д/з №2.4.3:
подставить какое-нибудь значение одного из аргументов в формулу некоторого одноместного предиката.
вариант решения:
x=2
$P(x,y) = P(2,y) = 2^0y^3 \vee 2^1y^2 \vee 2^2y^1 \vee 2^2y^2 \vee 2^3y^0 = 0y^3 \vee 0y^2 \vee 1y^1 \vee 1y^2 \vee 0y^0 = y^1 \vee y^2$

д/з №2.4.4:
решить какое-нибудь уравнение относительно некоторой предметной переменной, при заданных значениях остальных переменных.
вариант решения:
$P(2,y) = 1$ - надо найти корни этого уравнения.
$P(2,y) = y^1 \vee y^2 \Leftrightarrow y = 1$ или $y = 2$
$y \in \{1,2\}$

Лк №6
07.03.13

Тема 2.5. Основные свойства операций над логическими элементами.

операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания подчиняются законам (законы булевой алгебры):
1. идемпотентности. $\xi \vee \xi = \xi; \xi \cdot \xi = \xi$
2. коммутативности. $\xi \vee \eta = \eta \vee \xi$, $\xi\eta = \eta\xi$
3. ассоциативности. $(\xi \vee \eta) \vee \zeta = \xi \vee (\eta \vee \zeta)$, $(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta)$
4. дистрибутивности. $(\xi \vee \eta)\zeta = \xi\zeta \vee \eta\zeta$, $\xi\eta \vee \zeta = (\xi \vee \zeta)(\eta \vee \zeta)$
5. элиминации (поглощения). $\xi \vee \xi\eta = \xi$, $\xi(\xi \vee \eta) = \xi$
(все эти законы парные, кроме закона двойного отрицания - он самодвойственный)
6. свертывания. $\xi \vee \eta\overline{\eta} = \xi$, $\xi(\eta \vee \overline{\eta}) = \xi$
7. де Моргана. $\overline{\xi \vee \eta} = \overline{\xi}\,\overline{\eta}$, $\overline{\xi\eta} = \overline{\xi} \vee \overline{\eta}$
8. закон двойного отрицания. $\overline{\overline{\xi}} = \xi$
9. противоречия. $\xi\overline{\xi} = 0$

10. (двойственный закону противоречия) закон исключенного третьего
$\xi \vee \bar{\xi} = 1$

11. законы лжи и истины. $\xi \vee 0 = \xi$, $\xi \cdot 0 = 0$, $\xi \vee 1 = 1$, $\xi \cdot 1 = \xi$

д/з №2.5.1:
доказать справедливость какого-нибудь из этих законов.
вариант решения:
$\xi \vee \xi = \xi$. $0 \vee 0 = 0; 1 \vee 1 = 1$

Раздел 3. Свойства предикатов.

Тема 3.1. Основные тождества для предикатов узнавания предметов

для предикатов узнавания предметов справедливы следующие законы:

1. отрицания. $\overline{x_i^a} = \vee_{b \in U, b \neq a} x_i^b$

2. закон ложности. если $b \neq a$, то $x_i^a \cdot x_i^b = 0$

3. закон истинности. $\vee_{b \in U} x_i^b = 1$

$i = \overline{1, m}, \quad x_i \in U, \quad a, b \in U$

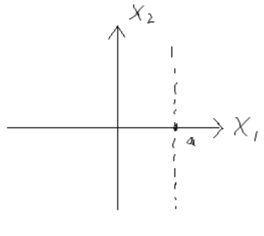
д/з №3.1.1:
записать закон отрицания для какого-нибудь универсума некоторой переменной и какого-нибудь предмета.
пусть в нашем примере универсум предметов состоит из трех предметов, универсум переменных - из трех переменных.
$U = \{a_1, a_2, a_3\}$
$V = \{x_1, x_2, x_3\}$
$\overline{x_3^{a_1}}$ - ложно, что x_3 равно значению a_1. т.е. $\overline{x_3^{a_1}} = x_3^{a_2} \vee x_3^{a_3}$
аналогично $\overline{x_1^{a_2}} = x_1^{a_1} \vee x_1^{a_3}$

д/з №3.1.2:
записать закон ложности для каких-нибудь переменных и предметов.
$U = \{a, b, c\}, \quad V = \{x, y\}$
$y^b y^c = 0$ (не может быть, чтобы *y* одновременно принимал два значения - *b* и *c*).

д/з №3.1.3:
записать закон истинности для каких-нибудь переменных и предметов.
$U = \{a, b, c\}, \quad V = \{x, y\}$
$x^a \vee x^b \vee x^c = 1$
$y^a \vee y^b \vee y^c = 1$ (не может быть такого, чтобы переменная не была равна ни одному из допустимых значений из универсума)

Тема 3.2. Несущественные аргументы предикатов.

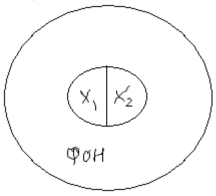
$P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$



$x_1 = a$

аргумент x_i предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ называется <u>фиктивным</u> или <u>несущественным</u>, если при любых $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_m \in U$ имеет место равенство $P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_m) = P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_m)$ (т.е. если значение этого аргумента не влияет на значение предиката).

пример:



- сравнение двух одинаковых цветов. при изменении фона кажется, что цвета x_1 и x_2 меняются, но они все равно остаются одинаковыми. т.е. цвет фона является несущественным.

предикат, у которого все аргументы кроме одного несущественны, называется <u>унарным</u>, кроме двух - <u>бинарным</u>, кроме трех - <u>тернарным</u>, *n* - <u>*n*-арным</u>. число *n* - <u>арность</u> предиката.

слова "одноместный", "двуместный", "трехместный", "многоместный" выражают размерность пространства, на котором задан предикат. <u>размерностью предиката</u> называется число всех его аргументов, в том числе и несущественных. отношение, соответствующее унарному предикату, называется <u>унарным</u>, и т.д. т.е. аналогично вводится арность отношений.

д/з №3.2.1:

составить таблицу трехместного бинарного предиката
(т.е. три переменных, одна из которых несущественна).
пример:

$$U = \{1,2\}$$

$$P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow y + z = 3$$

таблица предиката *P*:

z \ xy	11	12	21	22
1	0	1	0	1
2	1	0	1	0

д/з №3.2.2:

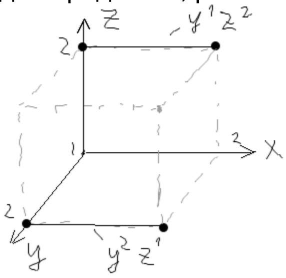
записать формулу какого-нибудь трехместного бинарного предиката.
для предиката, рассмотренного в предыдущем примере:

$$P(x, y, z) = x^1 y^1 z^2 \vee x^1 y^2 z^1 \vee x^2 y^1 z^2 \vee x^2 y^2 z^1 = (x^1 x^2) y^1 z^2 \vee (x^1 x^2) y^2 z^1 = (x^1 x^2)(y^1 z^2 \vee y^2 z^1) = y^1 z^2 \vee y^2 z^1$$

д/з №3.2.3:

построить график какого-нибудь трехместного бинарного предиката.

для предиката, рассмотренного в предыдущих примерах:



Тема 3.3. Дизъюнкция, конъюнкция и отрицание предикатов.

пусть $P, Q \in M$ (M - множество всех предикатов) - предикаты, соответствующие отношениям $P, Q \in \mathcal{L}$ <u>дизъюнкцией</u> или <u>логической суммой</u> предикатов *P* и *Q* называется предикат $P \vee Q$, соответствующий отношению $P \cup Q$.

д/з №3.3.1:

получить дизъюнкцию некоторых предикатов.

x	a	b	c	d
$P(x)$	1	1	0	0

$\Rightarrow P = \{(a), (b)\}$

x	a	b	c	d
$Q(x)$	0	1	0	1

$\Rightarrow Q = \{(b), (d)\}$

x	a	b	c	d
$(P \vee Q)(x)$	1	1	0	1

$\Leftarrow P \cup Q = \{(a), (b), (d)\}$

можно считать или напрямую (через двоичные значения), или же через отношения.

<u>конъюнкцией</u> или <u>логическим произведением</u> предикатов *P* и *Q* называется предикат $P \wedge Q$, соответствующий пересечению $P \cap Q$.

д/з №3.3.2:

получить конъюнкцию двух некоторых предикатов.

<u>отрицанием</u> предиката *P* называется предикат $\overline{P}$ или $\neg(P)$, соответствующий отношению $\tilde{P}$.

д/з №3.3.3:

получить отрицание какого-нибудь предиката.

сведение операции над предикатами к операции над двоичными значениями:

дизъюнкция:

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

конъюнкция:

$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

отрицание:

$$\overline{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \neg(P(x_1, x_2, \ldots, x_m))$$

если обозначить $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x$:

$$(P \vee Q)(x) = P(x) \vee Q(x)$$

$$(P \wedge Q)(x) = P(x) \wedge Q(x)$$

$$(\neg P)(x) = \overline{P(x)} = \neg(P(x))$$

д/з №3.3.4:

получить конъюнкцию каких-нибудь предикатов, пользуясь ее вторым определением.

$$P(x, y, z) = x^a y^b \vee x^b y^a z^c$$

$$Q(x,y,z) = x^b y^a \vee x^a y^a z^c$$

$$(P \wedge Q)(x,y,z) = P(x,y,z) \wedge Q(x,y,z) = (x^a y^b \vee x^b y^a z^c)(x^b y^a \vee x^a y^a z^c) =$$
$$= x^a y^b x^b y^a \vee x^b y^a x^b y^a z^c \vee x^a y^b x^a y^b z^c \vee x^b y^a z^c x^a y^b z^c = 0 \vee x^b y^a z^c \vee x^a y^b z^c \vee 0 = (x^b y^a \vee x^a y^b) z^c$$

д/з №3.3.5:

получить дизъюнкцию каких-нибудь предикатов, пользуясь ее вторым определением.

д/з №3.3.6:

получить отрицание какого-нибудь предиката, пользуясь его вторым определением.

$$P(x,y,z) = x^a y^b \vee x^b y^a z^c$$
$$\overline{P}(x,y,z) = \overline{x^a y^b \vee x^b y^a z^c}$$

д/з №3.3.7:

избавиться от знаков отрицания в какой-нибудь формуле некоторого предиката.

используем законы де Моргана:

$$\overline{\xi \vee \eta} = \overline{\xi}\,\overline{\eta}$$
$$\overline{\xi \eta} = \overline{\xi} \vee \overline{\eta}$$

$$\overline{P}(x,y,z) = \overline{x^a y^b \vee x^b y^a z^c} = \overline{x^a y^b} \cdot \overline{x^b y^a z^c} = (\overline{x^a} \vee \overline{y^b})(\overline{x^b} \vee \overline{y^a} \vee \overline{z^c}) = (x^b \vee x^c \vee y^a \vee y^c)(x^a \vee x^c \vee y^b \vee y^c \vee z^a \vee z^c)$$

для операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания справедливы законы идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, элиминации, свертывания, де Моргана и двойного отрицания, которые называются для них основными.

д/з №3.3.8:

записать основные законы для булевых операций над предикатами (дизъюнкции, конъюнкции и отрицания).

например, $P \vee P = P$

на след.неделе - аттестация. сделать д/з. если д/з есть и посещали лекции - то оценка 5 /* бу-га-га :)) */

Тема 3.4. Тождественно ложный и тождественно истинный предикат.

<u>пустым отношением</u> называется пустое подмножество предметного пространства U^m.

<u>полным отношением</u> называется все пространство U^m.

<u>тождественно ложным</u> называется предикат 0, соответствующий пустому отношению. $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv 0$

$$0(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

<u>тождественно истинным</u> называется предикат 1, соответствующий полному отношению.

предикаты 0 и 1 подчиняются тем же законам, что и логические элементы 0 и 1. эти законы называются для предикатов 0 и 1 основными.

д/з №3.4.1:

записать основные законы для предикатов 0 и 1 /* противоречия, исключенного третьего и т.д. - все, где встречаются 0 и 1 */

$$P \vee 0 = 0$$

Раздел 4. Алгебры

Тема 4.1. Алгебры

<u>алгеброй</u> $\mathcal{A}$ над множеством *A* называется система формульной записи элементов множества *A*. множество *A* называется носителем алгебры $\mathcal{A}$. любая алгебра $\mathcal{A}$ над *A* характеризуется множеством базисных операций, отображающих множество *A* в себя, и множеством базисных элементов, выбираемых из *A*.

множество всех базисных операций алгебры $\mathcal{A}$ называется <u>базисом операций</u> алгебры $\mathcal{A}$. множество всех базисных элементов алгебры $\mathcal{A}$ называется ее <u>базисом элементов</u>. базис операций и базис элементов вместе взятые образуют базис алгебры $\mathcal{A}$.

д/з №4.1.1:

привести пример алгебры, указать ее носитель, базисные операции и элементы.

варианты решения:

берем в качестве базисных элементов 9 чисел - 1,2,...,9. в качестве базисной операции - умножение. в качестве носителя - множество всех натуральных чисел.

если комбинированием элементов алгебры можно получить все элементы носителя, то алгебра является полной.

эта алгебра - неполная (простые числа получить нельзя).

примеры формул:

1; 2; 9; $((1\times 2)\times 9)\times 18$

если в качестве базисной операции использовать операцию сложения, то алгебра будет полной. более того, множество базисных элементов в этом случае можно сократить до "1".

еще примеры - алгебра булевых функций, алгебра предикатов.

<u>формулой</u> алгебры $\mathcal{A}$ называется запись, выражающая какую-нибудь суперпозицию базисных операций алгебры $\mathcal{A}$, примененную к ее базисным элементам.

д/з №4.1.2:

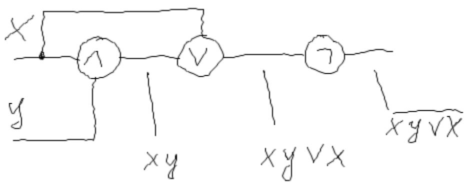
привести пример формулы какой-нибудь алгебры

вариант решения:

$\overline{xy \vee x}$

д/з №4.1.3:

дать схему суперпозиции операций, задаваемой какой-нибудь формулой.



алгебра над носителем *A* называется <u>полной</u>, если ее формулами можно выразить любой элемент множества *A*. базис алгебры называется <u>полным</u>, если эта алгебра полна.

д/з №4.1.4:

привести пример полной алгебры.

вариант решения:

в качестве базисных операций - $\vee, \wedge, \neg$, в качестве базисных элементов - x, y, z.

д/з №4.1.5:

привести пример неполной алгебры.

вариант решения:

в качестве базисных операций - $\vee, \wedge$, в качестве базисных элементов - x, y, z.

Лк №7
07.03.20

базис алгебры называется <u>несократимым</u>, если исключение из него любой операции или элемента делает его неполным.

д/з №4.1.6:

привести пример алгебры с несократимым базисом.

вариант решения:

базисный элемент - 1, базисная операция - "+".

второй пример - базисные операции - $\vee, \neg$, базисные элементы - x, y.

д/з №4.1.7:

привести пример алгебры с сократимым базисом

вариант решения:

$\vee, \wedge, \neg$, с предикатами 0, 1 и предикатами узнавания предметов - $x_i^{a_j}$, $a_j \in U, x_i \in V$. это алгебра с избыточным базисом. отсюда можно исключить отрицание (с помощью законов де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{x^{a_i}} = x^{a_1} \vee \ldots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \ldots \vee x^{a_k}$$

также можно исключить единицу:

$$1 = x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_k}$$

и 0:

$$U = \{a, b, \ldots\}$$

$$0 = x^a x^b, \qquad a \neq b$$

Тема 4.2. Тождества алгебры

формулы алгебры, выражающие один и тот же элемент в ее носителе, называются тождественными. тождеством алгебры называется запись, указывающая какую либо пару ее тождественных формул.

д/з №4.2.1:

записать некоторое тождество для некоторой алгебры

вариант решения:

$$x \vee y = y \vee x$$

если две алгебры имеют один и тот же носитель, то можно говорить и о тождестве формул разных алгебр.

д/з №4.2.2:

записать какое-нибудь тождество для разных алгебр

вариант решения:

первый базис - $\neg, \vee$, второй - $\neg, \supset$.

пусть на языке первой алгебры есть формула $\overline{x} \vee y$, тогда на языке второй алгебры она будет выглядеть как $x \supset y$.

аналогично $\overline{x} \supset y = x \vee y$

схемой тождеств алгебры $\mathcal{A}$ называется запись, указывающая целое семейство однотипных тождеств алгебры $\mathcal{A}$.

д/з №4.2.3:

записать какую-нибудь схему тождеств для некоторой алгебры

вариант решения:

возьмем в качестве примера алгебру логических элементов - 0,1. можно записать тождество $(1 \vee 0) \vee 1 = 1 \vee (0 \vee 1)$, или $(0 \vee 1) \vee 1 = 0 \vee (1 \vee 1)$

для того, чтобы записать эти формулы в общем виде, можно ввести переменные: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ - но это тождество - уже другого типа (тождество алгебры булевых функций, а не логических элементов).

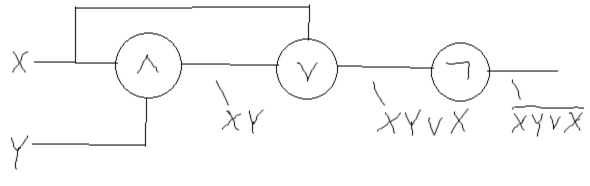
схемы тождеств алгебры называются законами этой алгебры.

обобщенные записи формул, стоящие слева и справа от знака равенства в схеме тождества, называются схемами формул данной алгебры.

д/з №4.2.4:

представить графически какую-нибудь схему формул

вариант решения:

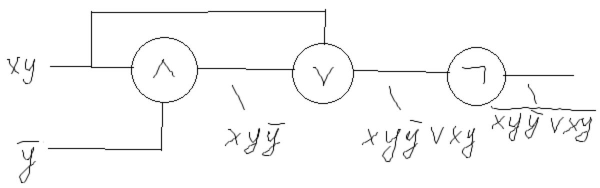


д/з №4.2.5:

синтезировать какую-нибудь формулу с помощью некоторой схемы формул

вариант решения:

для $X = xy, \qquad Y = \overline{y}$:



д/з №4.2.6:

придумать алгебру, схема тождеств которой превращается в тождество некоторой другой алгебры.

вариант решения:

схема тождеств $x \vee y = y \vee x$; $0 \vee 1 = 1 \vee 0$ /* т.е. схема тождеств $x \vee y = y \vee x$ алгебры логических элементов - является тождеством для алгебры булевых функций? а соответствующая схема тождеств для алгебры булевых функций будет - $X \vee Y = Y \vee X$? где X и Y - любые булевы функции (в этом частном случае X=x, Y=y). если я правильно понял, вроде так.. хотя я не уверен. */

система законов алгебры называется полной, если из нее можно логически вывести любое тождество этой алгебры.

д/з №4.2.7:

указать полную систему законов для какой-нибудь алгебры.

вариант решения:

алгебра 1,+

закон ассоциативности - A+(B+C)=(A+B)+C

одного этого закона достаточно, чтобы можно было установить тождественность или нетождественность любых двух формул.

(1+(1+1))+1=((1+1)+1)+1

система законов алгебры называется несократимой, если ни один из этих законов невозможно логически вывести из совокупности остальных.

д/з №4.2.8:

сократить какую-нибудь систему законов некоторой алгебры.

вариант решения:

возьмем три закона алгебры булевых функций: два закона де Моргана и закон двойного отрицания.

$\{\overline{AB} = \overline{A} \vee \overline{B}; \overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}; \overline{\overline{A}} = A\}$

из первого закона де Моргана и закона двойного отрицания можно вывести второй закон де Моргана:

$\overline{A \vee B} = \overline{\overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

т.е. исходная система - сократима.

для двойственных законов можно всегда оставить только один из двух.

д/з №4.2.9:

указать несократимую систему законов какой-нибудь алгебры.

вариант решения:

в алгебре булевых функций - 7 законов, указанных ранее (идемпотентности, коммутативности, дистрибутивности, ассоциативности, де Моргана, закон свертывания, закон двойного отрицания).

Раздел 5. Алгебры предикатов

Тема 5.1. Алгебры предикатов

алгеброй предикатов над M называется любая алгебра, носителями которой служит множество M всех предикатов на U^m.

булевой алгеброй предикатов над M называется любая алгебра предикатов над M, базис операций которой образован из операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов.

основные законы для дизъюнкции, конъюнкции и отрицания называются основными законами булевой алгебры предикатов.

д/з №5.1.1:

записать основные законы булевой алгебры предикатов.

вариант решения:

идемпотентность, коммутативность, и т.д. - все свойства, где есть дизъюнкция, конъюнкция и отрицание.

<u>канонической алгеброй</u> предикатов над М называется булева алгебра предикатов, базис элементов которой образован из предикатов 0 и 1 и всевозможных предикатов узнавания предмета - $x_i^a \qquad (i = \overline{1,m}; a \in U)$.

основные законы булевой алгебры предикатов вместе с основными законами для предикатов 0 и 1 и для предикатов узнавания предмета называются <u>основными законами канонической алгебры предикатов</u>.

д/з №5.1.2:

записать основные законы канонической алгебры предикатов.

вариант решения:

для 0 и 1 это законы истинности, лжи; для предикатов узнавания предметов - закон истинности, ложности, закон отрицания.

д/з №5.1.3:

записать какую-нибудь формулу канонической алгебры предикатов.

вариант решения:

$$\overline{x^a y^a \vee \overline{y^b}} \cdot 1 \vee 0$$

Тема 5.2. Дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов

исключая из базиса канонической алгебры предикатов операцию отрицания, получаем алгебру, называемую дизъюнктивно-конъюнктивной. ее базис состоит из операций дизъюнкции и конъюнкции предикатов 0,1 и всевозможных предикатов узнавания предмета - $x_i^a \qquad (i = \overline{1,m}; a \in U)$

д/з №5.2.1:

записать какую-нибудь формулу дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов.

вариант решения:

(любая формула канонической алгебры, только надо избавиться от отрицания)

$$x^a y^a \vee y^b \cdot 1 \vee 0$$

теорема о полноте дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов:

при любых U и m, дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов полна. любой ненулевой предикат P в ней выражается формулой $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \vee_{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \qquad (1)$

запись $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in P$ под знаком дизъюнкции означает, что логическое суммирование произведений $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$ ведется по всевозможным векторам ($a_1, a_2, \ldots, a_m$), которые принадлежат отношению P, соответствующему предикату P (мы обозначаем отношение и предикат одной и той же буквой).

произведение вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$ называется <u>конституэнтами единицы предиката</u>.

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{cases} 0, & (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in P \\ 1, & (a_1, a_2, \ldots, a_m) \notin P \end{cases}$$

другой вариант этой же теоремы:

на языке дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов, любой предикат, в том числе и нулевой, выражается в виде $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \vee_{a_1, a_2, \ldots, a_m \in U} P(a_1, a_2, \ldots, a_m) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \qquad (2)$

это определение более удобно, потому что оно не зависит от понятия отношения.

в формуле (2) справа от знака равенства используются логические элементы 0 или 1 под видом выражения $P(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. формула, стоящая в правой части равенства (1) или (2), называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).

Лк №8

07.03.27

в качестве СДНФ предиката 0 используется символ 0.

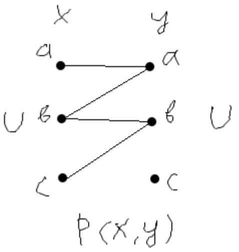
$$P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \vee_{a_1, a_2, \dots, a_m \in U} P(a_1, a_2, \dots, a_m) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \qquad (2)$$

д/з №5.2.2:

записать какой-нибудь предикат в виде СДНФ.

вариант решения:

пусть универсум предметов $U = \{a, b, c\}$, универсум переменных $V = \{x, y\}$



$P(x, y) = x^a y^a \vee x^b y^a \vee x^b y^b \vee x^c y^b$

Тема 5.3. Законы дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов

основные законы канонической алгебры предикатов, за исключением тех, в которых участвует операция отрицания, называются *основными законами дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов*.

д/з №5.3.1:

записать основные законы дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов.

вариант решения:

рефлексивность, ... (без отрицания)

д/з №5.3.2:

придумать пример упрощения формулы дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов

вариант решения:

пусть универсум предметов $U = \{a, b, c\}$, универсум переменных $V = \{x, y\}$

исходная формула имеет следующий вид:

$(x^a \vee x^b) y^a \vee (x^b \vee x^c)(y^a \vee y^b)$

раскрываем скобки:

$x^a y^a \vee x^b y^a \vee x^b y^a \vee x^c y^a \vee x^b y^b \vee x^c y^b = (x^a \vee x^b \vee x^b \vee x^c) y^a \vee (x^b \vee x^c) y^b =$

$= (x^a \vee x^b \vee x^c) y^a \vee (x^b \vee x^c) y^b = y^a \vee (x^b \vee x^c) y^b$

теорема о полноте системы основных законов дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов:

при любых U и V (т.е. при любом типе алгебры предикатов) система основных законов дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов полна.

идея доказательства - в том, что придумывается какая-то стандартная форма предиката (чтобы каждому предикату соответствовала только одна эта стандартная форма), и тогда если с помощью законов можно привести любой предикат к стандартной форме, можно легко установить, равны ли два предиката или нет. если это удается, то система законов полна.

д/з №5.3.3:

упростить какую-нибудь формулу дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов введением в ней знака отрицания

вариант решения:

пусть универсум предметов $U = \{a, b, c, d\}$, универсум переменных $V = \{x, y\}$

исходная формула имеет следующий вид:

$y^a \vee (x^b \vee x^c \vee x^d) y^b = y^a \vee \overline{x^a} y^b$

другой пример:

$y^a \vee (x^b \vee x^c) y^b = y^a \vee \overline{x^a \vee x^d} y^b$ - в этом виде формула не упрощается, только дополнительно добавляется отрицание.

д/з №5.3.4:

преобразовать какую-нибудь формулу дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов к СДНФ

вариант решения:

пусть универсум предметов $U = \{a, b, c\}$, универсум переменных $V = \{x, y, z\}$

исходная формула имеет следующий вид:

$$x^b z^c \vee x^a y^a = x^b \cdot 1 \cdot z^c \vee x^a y^a \cdot 1 = x^b (y^a \vee y^b \vee y^c) z^c \vee x^a y^a (z^a \vee z^b \vee z^c) =$$

$$= x^b y^a z^c \vee x^b y^b z^c \vee x^b y^c z^c \vee x^a y^a z^b \vee x^a y^a z^c = x^a y^a z^a \vee x^a y^a z^b \vee x^a y^a z^c \vee x^b y^a z^c \vee x^b y^b z^c \vee x^b y^c z^c$$

д/з №5.3.5:

установить, тождественны или нет какие-нибудь две формулы дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов.

/* преобразовать их в СДНФ и сравнить */

д/з №5.3.6:

преобразовать какую-нибудь формулу канонической алгебры предикатов в некоторую тождественную ей формулу дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов

вариант решения:

$$\overline{x^a \vee x^b y^c} = \overline{x^a} \cdot \overline{x^b y^c} = \overline{x^a}(\overline{x^b} \vee \overline{y^c}) = (x^b \vee x^c)(x^a \vee x^c \vee y^a \vee y^b)$$

Тема 5.4. Дизъюнктивная алгебра предикатов.

исключая из базиса дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов операцию конъюнкции, получаем алгебру предикатов, называемую дизъюнктивной.

эта алгебра неполная, но если рассматривать только одноместные предикаты - то для них она будет полной, т.к. любой предикат можно выразить в виде дизъюнкции. каждое место на самом деле может выражать набор предметов.

теорема о полноте дизъюнктивной алгебры одноместных предикатов:

при любом U и при любом V, для m=1, дизъюнктивная алгебра предикатов полна.

д/з №5.4.1:

записать на языке дизъюнктивной алгебры предикатов какое-нибудь множество.

вариант решения:

$(P(x) = (x = a) \vee (x = b) \vee (x = c))$

$M = \{a_1, a_2, a_4\}$

$M(x) = x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee x^{a_4}$

$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee x^{a_4} = 1$

основные законы дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов, за исключением тех, в которых участвует операция конъюнкции, называются *основными законами дизъюнктивной алгебры предикатов*.

д/з №5.4.2:

записать основные законы дизъюнктивной алгебры предикатов.

вариант решения:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup A = A$ (идемпотентность)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность)

$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_k} = 1$ (закон истинности)

теорема о полноте системы основных законов дизъюнктивной алгебры одноместных предикатов:

при любом U и m=1, система основных законов дизъюнктивной алгебры предикатов полна.

д/з №5.4.3:

установить, тождественны или нет две какие-нибудь формулы дизъюнктивной алгебры одноместных предикатов.

вариант решения:

$U = \{a, b, c\}, \qquad V = \{x\}$

$(x^a \vee x^b) \vee x^c; \qquad (x^b \vee x^c) \vee (x^a \vee x^c)$

$(x^b \vee x^c) \vee (x^a \vee x^c) = (x^a \vee x^b) \vee x^c = 1$

сравнение множеств может производиться через алгебру предикатов:

$\{a,a,b\} = \{a,b\}$ - мы это можем сказать на основании того, что $x^a \vee x^a \vee x^b = x^a \vee x^b$ - т.к. для алгебры предикатов существуют законы, по которым можно производить преобразования и устанавливать равносильность формул.

<u>консервативным расширением алгебры</u> называется такое расширение базиса этой алгебры, которое не увеличивает ее выразительные возможности, т.е. не расширяет множество описываемых ею объектов.

д/з №5.4.4:

консервативно расширить какую-нибудь алгебру.

вариант решения:

дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра с базисом $\vee, \wedge$, мы к ней добавляем $\neg$.

второй пример - добавить к дизъюнктивной алгебре одноместных предикатов операции конъюнкции и отрицания.

Тема 5.5. Схемная реализация предикатов

по формулам алгебры предикатов можно строить переключательные цепи, реализующие соответствующие им предикаты.

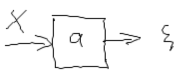
многоместный предикат в общем виде:

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - предметные переменные, ξ - логическая переменная.

имеется 4 типа элементарных блоков:

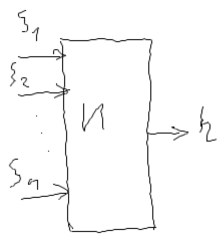
1. предикат узнавания предмета $x^a = \xi$ реализуется в цепях элементами узнавания предмета:



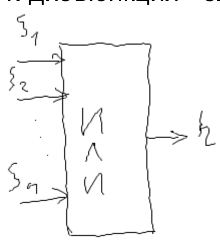
если вход *x* совпадает с *a*, то на выходе - 1, иначе - 0.

2. отрицание $\bar{\xi} = \eta$ в цепях реализовано инвертором:

3. конъюнкция - элементом совпадения:



4. дизъюнкция - элементом разделения:



исключая из *конституэнт единицы* вида $x_1^{a^1} x_2^{a^2} \ldots x_m^{a^m}$ какие-нибудь из ее сомножителей, получаем элементарные конъюнкции.

д/з №5.5.1:

записать какую-нибудь элементарную конъюнкцию.

вариант решения:

$U = \{a, b, c\}, \qquad V = \{x, y, z\}$

допустим, конституэнта единицы имеет вид $x^b y^c z^a$. исключаем из нее y^c, получаем элементарную конъюнкцию $x^b z^a$.

логическая сумма различных элементарных конъюнкций называется <u>дизъюнктивной нормальной формой</u> (ДНФ).

д/з №5.5.2:
записать какую-нибудь дизъюнктивную нормальную форму.
вариант решения:

$U = \{a, b, c\}, \qquad V = \{x, y, z\}$

$x^b y^c z^a \vee x^b z^a \vee x^a y^b$

дизъюнкция различных предикатов узнавания предметов называется <u>элементарной дизъюнкцией</u>.

д/з №5.5.3:
записать какую-нибудь элементарную дизъюнкцию.
вариант решения:

$U = \{a, b, c\}, \qquad V = \{x, y, z\}$

$x^b \vee y^c \vee z^a \vee z^b \vee z^c$

логическое произведение различных элементарных дизъюнкций называется <u>конъюнктивной нормальной формой</u> (КНФ).

дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы предиката реализуются трехступенчатыми цепями.

Лк №9
07.04.03

для получения экономных цепей используют минимальные ДНФ и КНФ, которые состоят из наименьшего числа предикатов узнавания предмета, или же достаточно простые (экономные) ДНФ и КНФ предикатов.

д/з №5.5.5:
реализовать какой-нибудь предикат в виде экономной трехступенчатой переключательной цепи.
вариант решения:
таблица предиката, для которого требуется получить экономную форму:

x_1 \ $x_2 x_3$	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
a	1	1	1	1	1	1	1	0	0
b	0	0	0	0	0	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0	0	1	0	0

$P(x_1, x_2, x_3)$

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^c \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^a$$

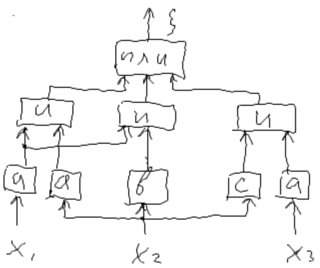
упрощаем:

$$x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c = x_1^a x_2^a (x_3^a \vee x_3^b \vee x_3^c) = x_1^a x_2^a$$

упрощая по аналогии, в результате получаем минимальную дизъюнктивную нормальную форму (МДНФ):

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a$$

сложность формулы оценивается числом входящих в нее предикатов узнавания предмета.
схема, соответствующая полученной форме:



построим теперь минимальную конъюнктивную нормальную форму (МКНФ):

x_1 \ x_2x_3	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	0	0	0	0	0	1	1	1
c	0	0	0	0	0	0	1	1	1

$P' = x_1^a \vee x_2^c$

x_2^a x_2^b

x_1 \ x_2x_3	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
a	1	1	1	1	1	1	1	0	0
b	1	1	1	1	1	1	1	0	0
c	1	1	1	1	1	1	1	0	0

x_3^a

$P'' = x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a$

$$P = P' \wedge P'' = (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a)$$

- эта форма содержит 5 предикатов узнавания предмета, в отличие от МДНФ, которая содержит 6 предикатов узнавания предмета.

строим переключательную цепь:

дальнейшее упрощение цепей достигается переходом к скобочным формам, в результате получаются многоступенчатые цепи.

д/з №5.5.6:

построить экономную многоступенчатую цепь, реализующую какой-нибудь предикат.

вариант решения:

$$x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a = x_1^a (x_2^a \vee x_2^b) \vee x_2^c x_3^a$$

дальнейшее упрощение цепей достигается введением формул отрицаний, а в цепь - инверторов. получаем инверторную многоступенчатую переключательную цепь.

д/з №5.5.7:

построить экономную инверторную многоступенчатую переключательную цепь для какого-нибудь предиката.

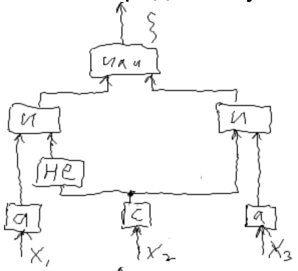
вариант решения:

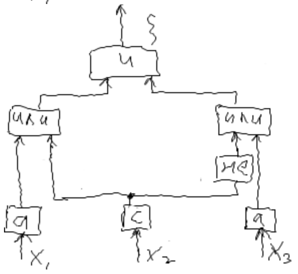
$$x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a = x_1^a(x_2^a \vee x_2^b) \vee x_2^c x_3^a = x_1^a \overline{x_2^c} \vee x_2^c x_3^a$$

- 4 предиката узнавания предмета + 1 отрицание.

$$(x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a) = (x_1^a \vee x_2^c)(\overline{x_2^c} \vee x_3^a)$$

- тоже 4 предиката узнавания предмета + 1 отрицание.





- в обеих схемах 6 входов, 1 инвертор, 3 элемента узнавания.

если необходимо реализовать сразу много предикатов, то дальнейшего упрощения цепей можно достичь за счет использования одной и той же аппаратуры для построения одинаковых частей цепей реализующих разные предикаты.

д/з №5.5.8:

построить экономную переключательную цепь, реализующую систему предикатов.

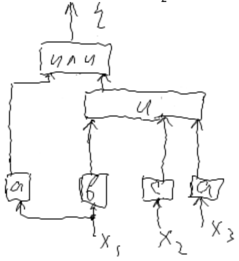
вариант решения:

$$\begin{cases} x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a = \xi \\ x_1^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a = \eta \end{cases}$$

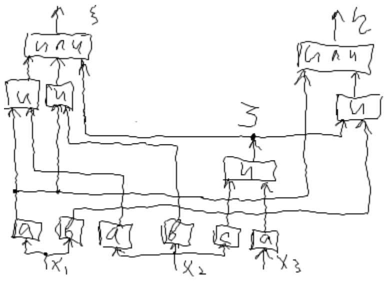
пусть $x_2^c x_3^a = \zeta$, тогда формулы принимают следующий вид:

$$\begin{cases} x_2^c x_3^a = \zeta \\ x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee \zeta = \xi \\ x_1^a \vee x_1^b \zeta = \eta \end{cases}$$

если реализовать эти формулы независимо действующими цепями, то получим цепь с 9 элементами узнавания предмета и 14 входами элементов совпадения и разделения, при трех ступенях:



если объединить эти схемы, получаем следующую схему:



- 6 предикатов узнавания предмета, 13 входов, 4 ступени.

Раздел 6. Предикаты на области

говорят, что предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ задан на области *M*, где *M* - какое-нибудь отношение на U^m. если значения его аргументов ограничены условием $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$. в этом случае отношение *M* называется областью задания предиката *P*. условие $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$ можно записать в виде уравнения $M(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$, в левой части которого записывается формула предиката *M*, соответствующего отношению *M*.

д/з №6.1.1:
записать уравнение, выражающее какую-нибудь область задания некоторого предиката.
вариант решения:
пусть $m = 2, \qquad U = \{1,2,3\}$

$P(x, y) = x^1 y^2 \vee x^2 y^2 \vee x^3 y^1$

x \ y	1	2	3
1	0	1	0
2	0	1	0
3	1	0	0

область задания предиката *P* выражается уравнением $x^1 y^2 \vee x^2 y^1 = 1$

$M(x, y) = x^1 y^2 \vee x^2 y^1$

говорят, что аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ заданы на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_m \subseteq U$, если их значения ограничены условиями $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$. в этом случае пишут $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m$. множества $M_1, M_2, \ldots, M_m$ называются <u>областями задания аргументов</u> $x_1, x_2, \ldots, x_m$ предиката *P*. отношение $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m$ - декартово произведение множеств $M_1, M_2, \ldots, M_m$. оно определяется условием $\forall x_1, x_2, \ldots, x_m \in U \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m \Leftrightarrow x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$.

декартово произведение множеств часто используется в качестве области задания предиката. условие $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m$ можно записать системой уравнений $M_1(x_1) = 1, M_2(x_2) = 1, \ldots, M_m(x_m) = 1$ или одним уравнением $M_1(x_1) \wedge M_2(x_2) \wedge \ldots \wedge M_m(x_m) = 1$.

$(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_m)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = M_1(x_1) \wedge M_2(x_2) \wedge \ldots \wedge M_m(x_m)$.

здесь $M_1(x_1), M_2(x_2), \ldots, M_m(x_m)$ - предикаты, соответствующие множествам $M_1, M_2, \ldots, M_m$.

д/з №6.1.2:
записать в виде формулы алгебры предикатов декартово произведение каких-нибудь множеств.
вариант решения:

$\{a, b\} \times \{c, d\}$

$(\{a, b\} \times \{c, d\})(x_1, x_2) = (x_1^a \vee x_1^b)(x_2^c \vee x_2^d)$

д/з №6.1.3:
записать системой уравнений алгебры предикатов декартово произведение каких-нибудь множеств.
вариант решения:

$$\begin{cases} x_1^a \vee x_1^b = 1 \\ x_2^c \vee x_2^d = 1 \end{cases}$$

д/з №6.1.4:

упростить формулу какого-нибудь предиката, определенного на некоторой области.
вариант решения:

$U = \{a, b, c\}$

$M(x, y) = x^a y^b \vee x^b y^a$

$P(x, y) = x^a y^b \vee x^c y^a \vee x^b y^b$

x \ y	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	0	0

M(x,y)

x \ y	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	0	0

P(x,y)

x \ y	a	b	c
a	0	1	0
b	0	0	0
c	0	0	0

P'(x,y)

$P'(x, y) = x^a y^b$

x \ y	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	1
c	0	1	1

P''(x,y)

$P''(x, y) = y^b \vee y^c = \overline{y^a}$

x \ y	a	b	c
a	1	1	1
b	0	0	0
c	0	0	0

P'''(x,y)

$P'''(x, y) = x^a$

$P^{IV}(x, y) = y^b$

Лк №10
07.04.10

Тема 6.2. Разложение предикатов

<u>импликацией</u> предикатов P и Q называется операция $P \supset Q = R$

$P \supset Q = \overline{P} \vee Q$

д/з №6.2.1:

найти импликацию каких-нибудь двух предикатов.
вариант решения:

$U = \{a, b, c\}, \qquad V = \{x\}$

$P(x) = x^a, \qquad Q(x) = x^b$

$P \supset Q = \overline{P(x)} \vee Q(x) = \overline{x^a} \vee x^b = x^b \vee x^c \vee x^b = x^b \vee x^c$

$x^a \supset x^b = x^b \vee x^c$

импликация логических элементов:

$\xi \supset \eta = \bar{\xi} \vee \eta = \zeta$

$0 \supset 0 = 1$

$0 \supset 1 = 1$

$1 \supset 0 = 0$

$1 \supset 1 = 1$

включение отношений $P \subseteq Q$ и связанное с ним *следование* предикатов $P \Rightarrow Q$

отношение $\sim, \cup, \cap$

предикат $\neg, \vee, \wedge$

символьная функция следования

$$P \Rightarrow Q = \forall x \in U \qquad (P(x) \supset Q(x)) = \begin{cases} 1 & (P \supseteq Q) \\ 0 & (P \not\supseteq Q) \end{cases}$$

д/з №6.2.2:

вычислить значение сигнальной функции включения (следования).

вариант решения:

$U = \{a, b, c\}, \qquad V = \{x\}$

$P(x) = x^a, \qquad Q(x) = x^b$

$x^a \Rightarrow x^b$

$\{a\} \not\subseteq \{b\}$

$\{a\} \subseteq \{a, b\}$

$P(x) \not\Rightarrow Q(x)$

$P \not\subseteq Q$

$x^a \subseteq x^b = ?$

вычислим это

$x^a \subseteq x^b = \forall x \in \{a, b, c\} \qquad (a^a \supset a^b)(b^a \supset b^b)(c^a \supset c^b) = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$1 \supset 0 \qquad 0 \supset 1 \qquad 0 \supset 0$

это значит $\{a\} \not\subseteq \{b\} \qquad x^a \not\Rightarrow x^b$

(из x=a не следует, что x=b)

если же $\{a\} \subseteq \{a, b\} \qquad x^a \Rightarrow x^a \vee x^b$

(если x=a, то x=a или x=b)

д/з №6.2.3:

установить, находятся ли два заданные отношения в отношении включения.

вариант решения:

P,Q - отношения первой ступени

$\supset$ - отношение второй ступени

теорема об импликативном разложении предиката

любой предикат F(x,y), определенный на декартовом произведении $A \times B$, можно представить в виде

$F(x, y) = \wedge_{a \in A}(x^a \supset F(a, y) \wedge B(y))$

$F(a, y) = F_a(y)$ - сколько *a*, столько $F_a(y)$ можем получить.

$F(a, y)$ - двумерный предикат, $F_a(y)$ - одномерный предикат.

$x_0^{\text{м}} x_1^{\text{сл}} x_2^{\text{ск}} x_3^{\text{ч}} x_4^{\text{п}} x_5^{\text{п}} x_6^{\text{и}} x_8^{\text{ч}} x_9^{\text{и}} x_{10}^{\text{е}} \supset x_{11}^{\text{о}} x_{12}^{\text{й}} \cup$

$\cup x_{11}^{\text{ч}} x_{12}^{\text{й}} \cup x_k^{\text{ы}} x_{12}^{\text{й}} = F_{\text{е}}(x_{11}, x_{12})$

$x_0^{\text{м}} x_1^{\text{сл}} x_2^{\text{ск}} x_3^{\text{ч}} x_4^{\text{п}} x_5^{\text{п}} x_6^{\text{и}} x_8^{\text{ч}} x_9^{\text{и}} x_{10}^{\text{м}} \supset x_{11}^{\text{ы}} x_{12}^{\text{е}} \cup$

$\cup x_{11}^{\text{ч}} x_{12}^{\text{е}} = F_{\text{м}}(x_{11}, x_{12})$

следствие из теоремы об импликативном разложении:

если множество A конечно ($A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$), то

$$F(x,y) = (x^{a_1} \supset F(a_1,y)B(y))(x^{a_2} \supset F(a_2,y)B(y))\ldots(x^{a_k} \supset F(a_k,y)B(y))$$

д/з №6.2.4:

получить импликативное разложение какого-нибудь двуместного предиката.

вариант решения:

предикат $F(x,y)$ задан на $A \times B,\quad x \in A,\quad y \in B$

$A = B = \{a,b,c\}$

x \ y	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	1	1
c	0	0	0	0

$F(x,y) = x^a y^b \vee x^a y^c \vee x^b y^c \vee x^b y^d$

разложим предикат:

$F(x,y) = (x^a \supset F(a,y)(y^a \vee y^b \vee y^c))(x^b \supset F(b,y)(y^a \vee y^b \vee y^c))(x^c \supset F(c,y)(y^a \vee y^b \vee y^c))$

$F(a,y) = a^a y^b \vee a^a y^c \vee a^b y^c \vee a^b y^d = y^b \vee y^c$

$F(b,y) = b^a y^b \vee b^a y^c \vee b^b y^c \vee b^b y^d = y^c \vee y^d \qquad (*)$

$F(c,y) = c^a y^b \vee c^a y^c \vee c^b y^c \vee c^b y^d = 0$

$F(x,y) = (x^a \supset (y^b \vee y^c)(y^a \vee y^b \vee y^c))(x^b \supset (y^c \vee y^d)(y^a \vee y^b \vee y^c))(x^c \supset 0(y^a \vee y^b \vee y^c)) =$

$= (x^a \supset y^b \vee y^c)(x^b \supset y^c)(x^c \supset 0) = (x^a \supset F_1(y))(x^b \supset F_2(y))(x^c \supset F_3(y)) = F(x,y)$

- предикат $F(x,y)$ разложили на три предиката $y^b \vee y^c,\quad y^c,\quad 0$.

представление отношений системой условий

отношение F, определяемое уравнением $F(x,y) = 1$, выражается равносильной ему системой уравнений:

$x^{a_1} \supset F(a_1,y)B(y) = 1$

$x^{a_2} \supset F(a_2,y)B(y) = 1$

$\ldots$

$x^{a_k} \supset F(a_k,y)B(y) = 1$

$x^{a_1} \supset F(a_1,y)B(y) = F_1(x,y)$

$x^{a_2} \supset F(a_2,y)B(y) = F_2(x,y)$

$\ldots$

$x^{a_k} \supset F(a_k,y)B(y) = F_k(x,y)$

$F(x,y) = F_1(x,y) \wedge F_2(x,y) \wedge \ldots \wedge F_k(x,y)$

д/з №6.2.5:

представить какое-нибудь двуместное отношение некоторой системой условий.

вариант решения:

$F(x,y) = x^a y^b \vee x^a y^c \vee x^b y^c \vee x^b y^d$

A=B={a,b,c}

подставляем (*) вместо F(x,y)

$$\begin{cases} x^a \supset y^b \vee y^c \\ x^b \supset y^c \\ x^c \supset 0 \end{cases}$$

X \ y	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	1	1
c	0	0	0	0

обобщение теоремы об импликативном разложении предиката

любой предикат $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, определенный на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times B$, можно разложить импликативно по аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \cap_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n} (x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} \supset F(a_1, a_2, \ldots, a_n, y) B(y))$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p)$$

Тема 6.3. Продукционные системы

практика построения систем искуственного интеллекта или информационных систем выработала три основных способа представления знаний:

а) продукционные системы
б) фреймовые системы
в) сетевые системы
г) язык человека

каждая продукционная система состоит из базы правил, предпосылок и механизма вывода.

д/з №6.3.1:

привести пример какой-нибудь продукционной системы.
вариант решения:

база правил:

правило 1: если "намерение - отдых" и "дорога ухабистая", то "использовать джип".
правило 2: если "место отдыха - горы", то "дорога ухабистая".

предпосылки:

1. "намерение - отдых"
2. "место отдыха - горы"

механизм вывода: его назначение - давать ответы на запросы.

д/з №6.3.2:

описать на языке алгебры предикатов работу механизма вывода.
вариант решения:
вводим предметные переменные и их значения:
x_1 - намерение
a_1 - отдых
x_2 - дорога
a_2 - ухабистая
x_3 - использовать
a_3 - джип
x_4 - место отдыха
a_4 - горы

"намерение - отдых" - $x_1^{a_1}$

"дорога ухабистая" - $x_2^{a_2}$

"использовать джип" - $x_3^{a_3}$

"место отдыха - горы" - $x_4^{a_4}$

база:

$x_1^{a_1} \supset x_3^{a_3}$

$x_4^{a_4} \supset x_2^{a_2}$

предпосылки:

$x_1^{a_1}, \qquad x_4^{a_4}. \qquad x_3 = ?$

ожидаемое заключение - $x_3^{a_3}$

работа механизма вывода:

$x_1^{a_1} = 1, \qquad x_4^{a_4} = 1$

$1 \cdot x_2^{a_2} \supset x_3^{a_3}, \qquad x_2^{a_2} \supset x_3^{a_3}$

$1 \supset x_2^{a_2}$

$\bar{1} \vee x_2^{a_2} = 0 \vee x_2^{a_2} = x_2^{a_2}$

$x_2^{a_2} \supset x_3^{a_3} = 1$

$x_2^{a_2} = 1$

$x_2^{a_2} \supset x_3^{a_3}$

$1 \supset x_3^{a_3} = \bar{1} \vee x_3^{a_3} = 0 \vee x_3^{a_3} = x_3^{a_3}$

$x_3^{a_3} = 1, \qquad x_3 = a_3$ - использовать джип.