Лк №1
07.02.06

Гибкина Надежда Валентиновна

Математическая экономика

Литература:

1. Альсевич В.В. Введение в математическую экономику. конструктивная теория. М. 2005 г.
2. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. М. 1998 г.
3. Мытрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М. 1975 г.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш.школа, 1986 г.
5. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. 1984 г.
6. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. СПб, 2002 г.

7. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни Математична економіка. Харьков, 2006 г. Стадникова Г.В, Гибкина, Агапова.
8. Методичні вказівки до самостійних робіт з дисципліни Математична економіка. Харьков, 2006 г. Стадникова Г.В, Сидоров.
9. Конспект лекций по дисциплине математическая экономика. Стадникова.

Введение в математическую экономику

математическая экономика занимается изучением основных принципов построения математических моделей экономических систем и специфических с математической точки зрения методов их исследования.

основные разделы мат.экономики:

1. теория личного потребления и математическая модель поведения потребителя на рынке
2. теория фирмы, производственные функции и теория общего равновесия Вальраса.
3. статистические линейные модели производства (модели Леонтьева), модель межотраслевого баланса
4. динамические модели производства. модели фон Неймана и Канторовича.

множество $\mathfrak{X}$ пространства R^n называется <u>выпуклым</u>, если вместе с любыми двумя своими точками x_1 и x_2 оно содержит также все точки вида $z(\alpha) = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (при α=0, $z=x_2$, при α=1, $z=x_1$).

с геометрической точки зрения множество является выпуклым тогда и только тогда, когда оно вместе с любыми двумя своими точками содержит также и отрезок, их соединяющий.

выпуклое множество, все границы которого линейны, называется <u>выпуклым многогранным множеством</u> или <u>выпуклым многогранником</u>.

свойства выпуклых множеств:

1. если $x_1, x_2, ..., x_n$ - точки выпуклого множества S, то точка $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ также принадлежит множеству S.
2. множество выпуклых комбинаций любого заданного числа выпуклых множеств из R^n является выпуклым множеством.
3. если S_1 и S_2 - выпуклые множества, а точки x_1, x_2 таковы, что $x_1, x_2 \in S_1$ и $x_1, x_2 \in S_2$ то весь отрезок, их соединяющий, лежит в обоих множествах. т.е. пересечение выпуклых множеств также выпукло.
4. свойство отделимости. рассматриваем выпуклое множество $\mathfrak{X}$ и точку $d(d_1, d_2) \notin \mathfrak{X}$. тогда найдется такая прямая $ax_1 + bx_2 = c$, что множество $\mathfrak{X}$ и точка d будут лежать по разные стороны этой прямой.

$$\forall x'(x_1', x_2') \in \mathfrak{X} \qquad ax_1' + bx_2' \leqslant c \qquad ad_1 + bd_2 > c$$

<u>гиперплоскостью</u> в пространстве R^n называется множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = c$

$(\overline{P}, \overline{X}) = c$

$\overline{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ - нормаль к гиперплоскости

$\overline{X} = (x_1, \ldots, x_n)$

теорема о разделяющей гиперплоскости:

пусть $\tilde{X}$ - замкнутое выпуклое множество, и точка $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \notin \tilde{X}$. тогда существует гиперплоскость с нормалью $\overline{p} \neq 0$, такая что $(\overline{p}, \overline{a}) > c$ и $\forall \overline{x}' \in \tilde{X} \qquad (\overline{p}, \overline{x}') \leqslant c$

теория личного потребления

<u>товаром</u> будем называть некоторое благо, которое поступило в продажу в определенное время в определенном месте. будем считать, что всего различных товаров - n.

в этом случае вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется <u>набором товаров</u>, а x_i - i-й товар. подпространство R_+^n (положительный ортант пространства R^n) называется <u>пространством товаров и услуг</u>. (ортант - общий случай октанта, для многомерного пространства).

для того, чтобы сравнивать разные наборы товаров, вводится отношение предпочтения $\succcurlyeq$. запись $x \succcurlyeq y$ означает, что x предпочтительнее или равноценен набору y. $x \approx y$ - x и y равнозначны.

существуют ряд аксиом, которым подчиняются абсолютно все потребители - аксиомы предпочтения:

1. транзитивность. если наборы товаров x, y, z таковы, что $x \succ y$, $y \succ z$,то $x \succ z$

2. ненасыщенность. для любых двух наборов x и y из условия $x \geqslant y$ следует, что $x \succcurlyeq y$, причем если $x \geqslant y$ и $x \neq y$, то $x \succ y$. это означает, что если в наборе x количество каждого товара не меньше чем количество соответствующего товара в наборе y, причем хотя бы по одному товару строго больше, то x строго предпочтительнее, чем y.

<u>точкой насыщения</u> называется наиболее предпочтительный набор товаров, т.е. такой набор $x \in \tilde{X}$, что $x \succcurlyeq y \qquad \forall y \in \tilde{X}$. согласно аксиоме 2, точка насыщения отсутствует.

3. аксиома выпуклости. для любых x и y, таких, что $x \neq y, x \approx y$, выполняется одно из следующих соотношений:

$\alpha x + (1-\alpha) y \succ x$ или $\alpha x + (1-\alpha) y \succ y$

$0 < \alpha < 1$

(лучше каждого товара понемножку, чем один в большом количестве).

функция полезности

<u>функция полезности</u> - это непрерывная действительная функция U(X), ставящая в соответствие набору товаров X некоторую числовую характеристику - полезность этого набора для данного потребителя.

свойства функции полезности:

1. $U(X) \geqslant U(Y)$ если $X \succcurlyeq Y$,

$U(X) > U(Y)$ если $X \succ Y$

$U(X) = U(Y)$ если $X \approx Y$

2. функция U(X) - возрастающая, монотонная и выпуклая вверх:

3. $\dfrac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \qquad i = \overline{1,n}$

$\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ - предельная полезность i-го товара в наборе, которая показывает, насколько увеличивается полезность всего набора при добавлении одной дополнительной единицы товара x_i. и неизменных количествах других товаров.

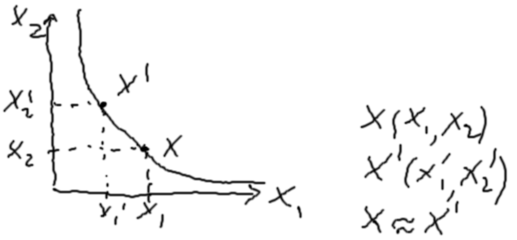
4. матрица Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

должна быть отрицательно определена, и в частности должно иметь место неравенство $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = \overline{1,n}$. это значит, что предельная полезность товара уменьшается по мере потребления этого товара (закон Госсена).

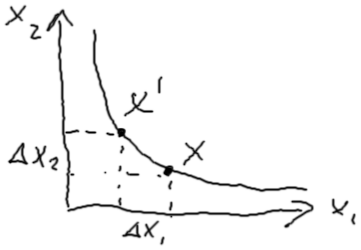
кривая безразличия

множество наборов товаров, которые равнозначны для потребителя, называется <u>множеством безразличия (кривой безразличия)</u>.



на кривой безразличия функция полезности принимает одно и то же значение.

одной из характеристик кривой безразличия является ее наклон. абсолютное значение наклона на разных участках кривой выражает норму замены благ.



отношение $\left|\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|$ (наклон касательной) показывает, сколько единиц второго товара добавочно могут компенсировать уменьшение первого товара на единицу. переходя к пределу, получаем $-\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_j}}{\frac{\partial U}{\partial x_k}}$

оптимизационная математическая модель поведения потребителя на рынке товаров и услуг

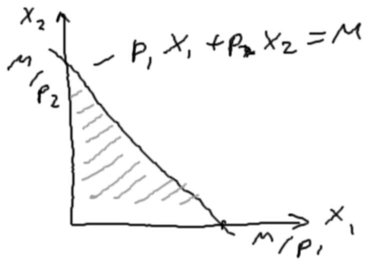
бюджетная линия

бюджетное ограничение показывает, что расходы на приобретение товаров не должны превышать дохода: $(P, X) \leqslant M$ (скобки - скалярное произведение).

$P = (p_1, \ldots, p_n)$ - вектор цен, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ - набор товаров.

<u>бюджетная линия (линия цен)</u> - геометрическое место точек всех наборов товаров, стоимость которых равна определенной сумме M.

в пространстве R^2 бюджетная линия имеет вид

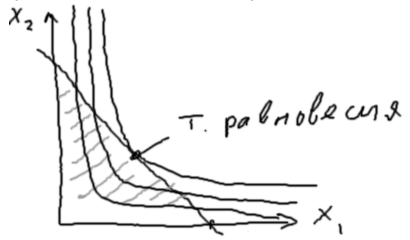


свойства линии цен:

1. отрицательный наклон, равный обратному соотношению цен двух товаров: $-\dfrac{p_1}{p_2}$

2. при постоянных ценах, разным уровням дохода отвечают разные бюджетные линии, причем чем выше доход, тем выше будет лежать бюджетная линия.

<u>точка равновесия</u> - это точка касания бюджетной линии и самой верхней возможной кривой безразличия. она говорит о том, что у потребителя нет мотива для выбора другого набора товаров.



модель поведения потребителя на рынке является задачей нелинейного программирования следующего вида:

$$\max_{\bar{x}\in C} U(X) \qquad (1)$$

$$C: \quad (P,X)\leqslant M, \quad X\geqslant 0$$

в развернутом виде:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n\in C} U(x_1,\ldots,x_n)$$

$$C: \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \leqslant M \\ x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

$P=(p_1,\ldots,p_n)$ - вектор цен, p_i - цена на i-й товар.

p_ix_i - затраты на приобретение i-го товара.

задача (1) заключается в выборе такого набора $x^* \in C = \{\bar{x} \leqslant R_+^n \mid (P,X)\leqslant M$, который является наилучшим, т.е. для всех других наборов $x\in C$ выполняется соотношение $X^* \succcurlyeq X$ и $U(X^*)\geqslant U(X)$.

поскольку целевая функция U(X) непрерывна, имеет положительные первые частные производные и отрицательно определенную матрицу Гессе, а допустимое множество C - замкнуто и выпукло, то по теореме Вейерштрасса, решение задачи (1) существует и единственно. решение задачи ищется с помощью метода множителей Лагранжа.

функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,\lambda) = U(X) - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} p_ix_i - M\Big)$$

необходимыми и достаточными условиями решения задачи 1 являются условия Куна-Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \leqslant 0, \qquad i=\overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - \sum_{i=1}^{n} p_ix_i \geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i\Big)x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = \lambda(M - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i) = 0$$

$$x_i \geqslant 0, \qquad \lambda \geqslant 0$$

оптимальный план (оптимальный набор товаров X^*) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* \qquad (3)$$

основные выводы из решения задачи (1):

1. при оптимальном наборе товаров X^* весь бюджет расходуется, а сам этот товар лежит на бюджетной линии.
2. в точке X^* отношение предельных полезностей товаров равно отношению их цен:

$$\frac{\dfrac{\partial U(X^*)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial U(X^*)}{\partial x_k}} = \frac{p_i}{p_k}$$

3. в точке X^* цены пропорциональны предельным полезностям товаров, т.е. $\frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i} = \lambda^* p_i, \qquad i = \overline{1,n}$ (следует из (2))
4. предельная полезность, приходящаяся на одну денежную единицу, одинакова для всех наборов товаров и равна $\lambda^* = \frac{1}{p_i}\frac{\partial U(X^*)}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{1,n}$

λ^* - предельная полезность денег.

λ^* уменьшается с ростом M и возрастает с его уменьшением.

анализ математической модели поведения потребителя

$X^* = X^*(M,P) = (x_1^*(M,P),\ldots,x_n^*(M,P))$ - функция спроса.

свойство функции спроса - это ее однородность относительно всех цен и дохода:

$$X^*(\alpha P, \alpha M) = X^*(P,M), \qquad \alpha \geqslant 0$$

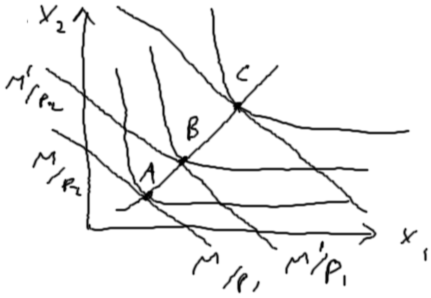
анализ задачи (1) заключается в изучении чувствительности решения (2),(3) к изменению параметров P и M. этот метод называется методом сравнительной статистики.

1. рассмотрим влияние изменения дохода M на поведение решения X^* задачи (1)

товар x_i называется ценным, если $\frac{\partial x_i^*}{\partial M} > 0$, т.е. если при увеличении дохода спрос на i-й товар растет. если же $\frac{\partial x_i^*}{\partial M} < 0$, то товар называется малоценным (при увеличении дохода спрос на товар падает).

пример - сливочное масло - ценный товар, маргарин - малоценный, т.к. при росте дохода больше будут покупать сливочное масло, чем более дешевый маргарин.

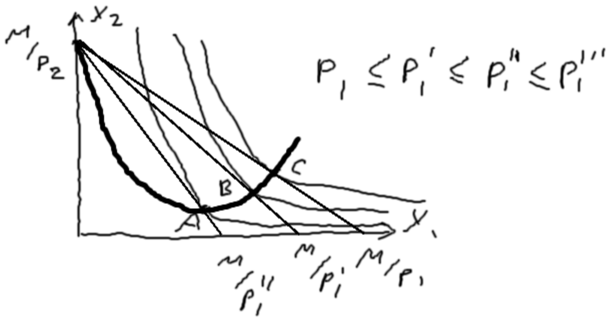
геометрическое представление изменения спроса при изменении дохода:



кривая, соединяющая все точки равновесия (A,B,C,...) называется кривой дохода-потребления, или кривой Энгеля. она показывает, как изменяется спрос потребителя при изменении его дохода.

2. рассмотрим влияние изменения цены на поведение решения X^* задачи (1)

пусть M и p_2 фиксированы, а p_1 меняем.



на графике показана кривая цена-потребление, или кривая цен. она показывает, как изменяется спрос на два товара, если изменяется цена на один из них.

товары называются взаимодополняющими, если один из них невозможно использовать при отсутствии другого (например, принтер и тонер для него; зубная паста и зубная щетка)

товары называются взаимозаменяемыми, если одним из них можно заменить второй (например, принтер и печатная машинка).

товар называется нормальным, если при увеличении цены спрос на этот товар падает, т.е. $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$.

товар называется товаром Гиффина, если при увеличении цены спрос на этот товар увеличивается.

Лк №2
07.02.13

след.вторник - к/р на пол-пары по всему материалу (только теория). особое внимание обратить на оптимизационную задачу, ф-ю полезности, производственная ф-ю, их свойства.

уравнение Слуцкого

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} - x_j^* \frac{\partial x_i^*}{\partial M}$$

$$X^* = X(P, M)$$

это уравнение показывает, каким образом изменяется спрос на товар в зависимости от изменения цены.

слева стоит величина, которая показывает реакцию спроса на изменение цены j-го товара при неизменных остальных ценах и доходе. слагаемое $-x_j^* \frac{\partial x_i^*}{\partial M}$ показывает реакцию точки спроса на изменение дохода, и называется эффектом дохода.

выражение $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}$ называется коэффициентом Слуцкого и показывает изменение спроса на i-й товар при компенсированном изменении цены на j-й товар, т.е. такое одновременное изменение цены на j-й товар и бюджета M, что полезность набора остается неизменной - *эффект замены*.

из уравнения Слуцкого следует, что при изменении цены на j-й товар, изменение спроса на i-й товар представляется двумя слагаемыми:

общий доход = эффект замены + эффект дохода.

матрица $c_{ji} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}$, размера $n \times n$ - симметрична и отрицательно полуопределена, т.е. $c_{ii} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп}} < 0,\ i = \overline{1,n}$

свойства матрицы c:

1. диагональные элементы показывают чистый эффект замещения, т.е. показывают изменение x_i при изменении p_i, таким образом, что доход изменяется так, чтобы значение функции полезности оставалось неизменным.
2. если $c_{ji} > 0$, то товары i и j считаются взаимозаменяемыми, если $c_{ji} < 0$, то товары i и j считаются взаимодополняющими, если $c_{ji} = 0$, то товары независимы.

коэффициент эластичности

<u>коэффициентом эластичности</u> функции одного аргумента $f(x)$ называется отношение относительного прироста функции к относительному приросту аргумента:

$$e(x) = \frac{\frac{\partial f}{f(x)}}{\frac{\partial x}{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{f(x)} = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

для функции *n* переменных ($f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$) говорят о частных коэффициентах эластичности:

$$e_j(\overline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_j}{f(\overline{x})}$$

функция спроса

$$\overline{X}^* = \overline{X}(P, M)$$

$$\overline{P} = (p_1, \ldots, p_n)$$

величины $e_{ij} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i^*}, \quad i, j = \overline{1,n}$, показывающие, насколько процентов изменится спрос на i-й товар при изменении цены на j-й товар на 1%, называются <u>коэффициентами эластичности по ценам</u>.

коэффициенты $e_{iM} = \frac{\partial x_i^*}{\partial M}\frac{M}{x_i^*}, \quad i = \overline{1,n}$, показывающие изменение спроса относительно изменения дохода на 1%, называются <u>эластичностью по доходу</u>.

алгоритм численного решения задачи оптимального поведения потребителя

(алгоритм Франка-Вулфа)

постановка задачи:

$$U(X) \to \max_{X \in \overline{X}}$$

заданы ограничения вида

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant M \qquad x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}$$

1. задаем начальное приближение

пусть реализовано *k* итераций, находимся в точке $X^{(k)}$

2. находим градиент функции $U(X)$ в точке $X^{(k)}$:

$$\nabla U(X^{(k)}) = \left(\frac{\partial U(X^{(k)})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U(X^{(k)})}{\partial x_n}\right)$$

3. строим линейную функцию $Z = z_1 \dfrac{\partial U(X^{(k)})}{\partial x_1} + \ldots + z_n \dfrac{\partial U(X^{(k)})}{\partial x_n}$

4. находим максимум функции Z при ограничениях $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant M$, откуда получаем точку $Z^{(k)} = \left(z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}\right)$

5. определяем оптимальное значение шага α_k из равенства

$$\frac{\partial U(X^{(k)} + \alpha_k (Z^{(k)} - X^{(k)}))}{\partial \alpha} = 0$$

$$0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1$$

6. вычисляем новое допустимое решение по формуле

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k (Z^{(k)} - X^{(k)})$$

7. вычисляем $U(X^{(k)})$ и $U(X^{(k+1)})$ и сравниваем. если $|U(X^{(k)}) - U(X^{(k+1)})| > \varepsilon$, то k=k+1, переходим к п.2

если $|U(X^{(k)}) - U(X^{(k+1)})| \leqslant \varepsilon$, то $X^{(k+1)}$ - оптимальное решение.

теория фирмы

производственная функция

обозначим через x_i затраты (ресурсы) i-го вида, $i = \overline{1,n}$, которые использует фирма для производства товаров. в таком случае $X = (x_1, \ldots, x_n)$ - вектор затрат.

$\tilde{X} \subseteq R_+^n$ - пространство затрат.

считаем, что фирма выпускает только один вид продукции и для этого использует *n* различных ресурсов.

производственной функцией называется функция, которая устанавливает количественную взаимосвязь максимально возможного объема выпуска продукции от производственных затрат:

$$q = f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

свойства производственной функции:

1. $f(0) = 0$ - если нет ресурсов, то произвести тоже ничего нельзя

2. существует подмножество пространства затрат $\tilde{X}$, называемое экономической областью, в котором увеличение любого вида затрат не сопровождается уменьшением выпуска продукции, т.е. если X_1 и X_2 - два вектора затрат, таких что $X_1 > X_2$, то $f(X_1) \geqslant f(X_2)$ (чем больше затраты, тем больше можно произвести). отсюда следует, что $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}$.

величины $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}$ называются предельными производительностями.

существует точка, в которой $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = 0$ и потом будет иметь место обратное неравенство: $\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} \leqslant 0$.

мы будем рассматривать только положительные производные.

3. существует выпуклое подмножество экономической области, в котором матрица Гессе вторых производных $H = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = \overline{1,n}$ отрицательно определена, в частности $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \leqslant 0$. т.е. при увеличении затрат одного вида достигается такая область, в которой предельная производительность падает.

4. производственная функция характеризуется постоянной отдачей (доходом) от расширения масштаба производства, если выпуск продукции возрастает в той же пропорции, что и затраты: $f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства, если выпуск продукции возрастает в большей степени, чем затраты: $f(\alpha X) > \alpha f(X)$.

производственная функция характеризуется убывающей отдачей от расширения масштабов производства, если выпуск продукции возрастает в меньшей степени, чем затраты: $f(\alpha X) < \alpha f(X)$.

эластичность производства

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(X)} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

- показывает изменение дохода при расширении масштаба производства в заданной точке пространства

оптимизационная математическая модель поведения фирмы

допущения, которые мы сделаем при рассмотрении задач:

1. производственная функция отображает только технологические условия производства (т.е. не учитывает внешних воздействий)
2. никаких внешних ограничений на объем производства, закупаемые затраты и реализацию продукции не накладывается.
3. на рынке имеет место совершенная конкуренция, при которой фирмы не могут влиять ни на цены закупаемых затрат, ни на цены реализации продукции, а также возможен свободный выход фирмы на рынок и уход с рынка.

модель максимизации выпуска продукции при заданных затратах:

постановка задачи:

задана производственная функция $q = f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и цены на факторы производства: $\overline{W} = (w_1, \ldots, w_n)$ и бюджет М на приобретение этих факторов производства.

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \max_{x_1, \ldots, x_n \in C} \qquad (1)$$

$$C: \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \leqslant M \qquad x_i \geqslant 0, \qquad i = \overline{1, n} \qquad (2)$$

задача (1),(2) является задачей нелинейного программирования условной максимизации и может быть решена методом множителей Лагранжа или алгоритмом Франка-Вулфа.

свойства оптимального решения задачи (1),(2):

1. в оптимальной точке $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и при λ^* выполняется условие $\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial x_i} = \lambda^* w_i, \qquad i = \overline{1, n}$.

т.е. предельные производительности факторов производства пропорциональны ценам на них.

2. соотношение предельных производительностей факторов производства равно отношению их цен, т.е.

$$\frac{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial x_k}} = \frac{w_i}{w_k}, \qquad i, k = \overline{1, n}$$

3. предельная производительность факторов производства, приходящаяся на одну денежную единицу в оптимальном плане, одинакова для всех факторов производства:

$$\frac{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial x_i}}{w_i} = \lambda^*, \qquad i = \overline{1, n}$$

модель равновесия фирм

рассмотрим задачу максимизации прибыли фирмы при заданных ценах на продукцию *p*, на затраты производства $W = (w_1, \ldots, w_n)$ и при заданном процессе производства (т.е. задана производственная функция $f(x_1, \ldots, x_n) = q$)

П=Д-Z (прибыль = доход - затраты)

доход - это объем выпуска * цену, т.е. Д = $p \cdot q$.

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$$\Pi = p \cdot f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to \max_{x_1, \dots, x_n}$$

1. задача долгосрочного планирования.

не накладываются ограничения на максимально возможный объем затрат

$$\Pi = p \cdot f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to \max_{x_1, \dots, x_n} \qquad (3)$$

$$x_i \geqslant 0, \qquad i = \overline{1, n} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = p \frac{\partial f}{\partial x_i} - w_i = 0, \qquad i = \overline{1, n} \qquad (5)$$ - необходимое условие оптимальности для задачи (3),(4).

при оптимальном векторе затрат $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ имеет место соотношение $p \dfrac{\partial f(X^*)}{\partial x_i} = w_i, \qquad i = \overline{1, n}$. т.е. стоимость предельного продукта равна цене соответствующего затрачиваемого фактора w_i.

2. краткосрочная задача

на работу фирмы накладываются ограничения. например, на закупку затрат.

$$\Pi = p \cdot f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \to \max_{x_1, \dots, x_n \in C} \qquad (6)$$

$$C : g_j(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_j, \qquad j = \overline{1, m}$$

$$x_i \geqslant 0, \qquad i = \overline{1, n} \qquad (7)$$

если C - это выпуклое множество и целевая функция *p* выпукла вверх, то задача (6),(7) является задачей выпуклого программирования и может быть решена методом штрафных функций или его модификациями.

алгоритм решения задачи равновесия фирмы. метод Эрроу-Гурвица.

вместо функции $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ в методе Эрроу-Гурвица оптимизируется функция $F(x_1, \dots, x_n) = \Pi(x_1, \dots, x_n) + H(x_1, \dots, x_n)$. H - штрафная функция:

$$H(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x_1, \dots, x_n) g_j(x_1, \dots, x_n)$$

$$\alpha_j(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & b_j - g_j(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0 \qquad (X \in C) \\ \alpha_j, & b_j - g_j(x_1, \dots, x_n) < 0 \qquad (X \notin C) \end{cases}$$

алгоритм метода

1. задается начальное решение $X^{(0)}$, точность вычислений ε и шаг λ.

считаем, что пройдено k итераций и мы находимся в точке $X^{(k)}$

2. находим частные производные целевой функции $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ по всем переменным $x_i, \qquad i = \overline{1, n}$ и производные функции ограничений:

$$G_j(x_1, \dots, x_n) = b_j - g_j(x_1, \dots, x_n), \qquad j = \overline{1, m}$$

3. при k=0 $X^{(k)} \in C$, поэтому $\alpha_j^{(k)} = 0$

4. вычисляем новое значение $X^{(k+1)}$ по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \max\left\{0; x_i^{(k)} + \lambda \left[\frac{\partial \Pi(X^{(k)})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(k)} \frac{\partial G_j(X^{(k)})}{\partial x_i}\right]\right\}$$

5. проверяем, удовлетворяют ли координаты найденной точки $X^{(k+1)}$ системе ограничений (7).

если $X^{(k+1)} \notin C$, то переходим к п.6. если $X^{(k+1)} \in C$ и $|\Pi(X^{(k+1)}) - \Pi(X^{(k)})| > \varepsilon$, то полагаем k=k+1 и переходим к п.4.

если $X^{(k+1)} \in C$, $X^{(k)} \in C$ и $|\Pi(X^{(k+1)}) - \Pi(X^{(k)})| \leqslant \varepsilon$, то точка $X^{(k+1)}$ доставляет максимальное значение целевой функции Π . считаем, что $X^* = X^{(k+1)}$. конец алгоритма.

6. вычисляем весовые коэффициенты $\alpha_j^{(k)}$ по формуле $\alpha_j^{(k)} = \max\{0, \alpha_j^{(k-1)} - \lambda G_j(X^{(k)})\}, \qquad j = \overline{1,m}$, где $G_j = b_j - g_j(x_1, \ldots, x_n)$.

переходим к п.4.

конкуренция среди немногих

рыночный механизм, который действует при небольшом количестве фирм, называется конкуренцией среди немногих: случай, когда существует несколько продавцов продукции называется олигополией, а случай, когда существует несколько покупателей определенного вида затрат (ресурсов), называется олигопсонией. основным свойством конкуренции среди немногих является то, что все конкурирующие фирмы могут влиять на цены продукции и цены затрат, т.е. прибыль каждой фирмы зависит от политики поведения всех других фирм.

Лк №3
07.02.20

контрольная №2 (домашняя):

методичка по самостоятельной работе (есть в списке литературы) - страница 40, индивидуальные задания. взять задачи 1,2,4,5,7.

Задача 1. инф-03-3 - с 20 по 30 задание, и последний человек делает первое задание.

в остальных задачах каждая группа берет задания с начала.

сдать до 27 марта или 10 апреля (на лабораторных).

вычислять можно на компьютере (обратные матрицы и т.п.)

инф-03-2 и инф-03-3 - **вторая подгруппа** на лабораторных, инф-03-1 - первая.

олигополия - будем считать, что на рынке - только две фирмы. задана производственная функция для первой фирмы: $q^1 = f^1(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ и для второй: $q^2 = f^2(x_1^2, \ldots, x_n^2)$. обе фирмы производят один и тот же товар. цена $p = p(q^1, q^2)$

если фирма начинает производить больше товаров, цена на продукцию уменьшается:

$$\frac{\partial p}{\partial q^1} < 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial q^2} < 0$$

цена на факторы производства зависит от того, сколько этого ресурса потребляет первая фирма, и от того, сколько этого же ресурса будет потреблять вторая фирма.

$$w_i = w_i(x_i^1, x_i^2), \qquad i = \overline{1,n}$$

где x_i^1, x_i^2 - ресурс i-го вида, потребляемый первой и второй фирмами соответственно.

$\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} > 0, \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} > 0$ - чем больше фирма покупает ресурсов, тем выгоднее поставщикам поставлять эти ресурсы дороже.

задача максимизации прибыли для первой фирмы будет иметь следующий вид:

$$\Pi^1(q^1, x_1^1, \ldots, x_n^1) = \left(p(q^1, q^2)q^1 - \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i^1, x_i^2)x_i^1 \right) \to \max_{q^1, x_1^1, \ldots, x_n^1}$$

для решения этой задачи используется метод множителей Лагранжа.

рассматриваем частный случай (дуополию - когда существует только два продавца товаров). есть две фирмы, одна из них производит q^1 единиц товара, вторая - q^2 . суммарное количество товаров на рынке

- $q = q^1 + q^2$. цена на товар задается следующим соотношением:

$$p = a - b(q^1 + q^2), \qquad a > 0, b > 0 .$$

функции затрат:

$$C^1(q^1) = cq^1 + d$$

$$C^2(q^2) = cq^2 + d$$

$$c > 0, d > 0$$

c - это затраты на производство единицы продукции, *d* - это постоянные затраты.

задача максимизации прибыли первой фирмы в таких условиях имеет следующий вид:

$$\Pi^1 = (a - b(q^1 + q^2))q^1 - (cq^1 + d) \to \max_{q^1}$$

вычисляем производную:

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1} = (a - b(q^1 + q^2)) - q^1 b - b\frac{\partial q^2}{\partial q^1} q^1 - c = 0 \Rightarrow q^1$$

величина $\frac{\partial q^2}{\partial q^1}$ называется <u>возможной вариацией</u> и показывает изменение выпуска продукции второй фирмы при изменении выпуска первой фирмы.

рассмотрим случай *дуополии Курно*, когда возможные вариации равны 0, т.е. фирма считает, что изменение в ее собственном выпуске продукции не влияет на изменение выпуска конкурентов. решение последней задачи оптимизации называется <u>равновесием Курно</u>. в таком случае она решается при условиях

$$\left.\frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1}\right|_{\frac{\partial q^2}{\partial q^1}=0} = 0$$

(для первой фирмы)

$$\left.\frac{\partial \Pi^2}{\partial q^2}\right|_{\frac{\partial q^1}{\partial q^2}=0} = 0$$

(для второй фирмы)

решение имеет следующий вид:

$$q^1 = q^2 = \frac{a-c}{3b}$$

$$p = \frac{a+2c}{3}$$

$$q = q^1 + q^2 = \frac{2(a-c)}{3b}$$

если количество фирм $N \to \infty$, то решение последней задачи будет иметь вид

$$q^i = \frac{a-c}{(N+1)b}, \qquad i = \overline{1,N}$$

$$p = \frac{a+Nc}{N+1}, \qquad q = \frac{N(a-c)}{(N+1)b}$$

- этот случай соответствует совершенной конкуренции.

МОНОПОЛИЯ И МОНОПСОНИЯ

<u>монополия</u> - это ситуация, в которой фирма монопольно влияет на цену продукции, так как ее продукции на рынке большинство.

<u>монопсония</u> - это ситуация, когда фирма монопольно влияет на цены факторов производства.

$$p = p(q)$$

$\frac{dp}{pq} < 0$ - чем больше произведенной продукции, тем ниже должна быть цена на нее.

предельный годовой доход фирмы определяется как изменение годового дохода при изменении выпуска продукции:

$$\frac{\partial R(q)}{\partial q} = p(q) + \frac{\partial P(q)}{\partial q} q$$

где $R(q) = p(q)q$ - годовой доход.

предельный годовой доход показывает, насколько годовой доход изменится, если производство продукции изменится на 1.

пусть ω_i - цена на i-й фактор производства, $\omega_i = \omega_i(x_i), \qquad i = \overline{1,n}$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} > 0$$

предельная стоимость затрат i-го вида показывает изменение стоимости этих затрат при увеличении их количества, и равна

$\frac{\partial C_i}{\partial x_i} = \omega_i + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} x_i$, где $C_i(x_i) = \omega_i(x_i) x_i$ - стоимость затрат i-го вида.

задача оптимизации прибыли фирмы в условиях монополии имеет следующий вид:

$$\Pi(q, x_1, \ldots, x_n) = p(q)q - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i) x_i \to \max_{q, x_1, \ldots, x_n}$$

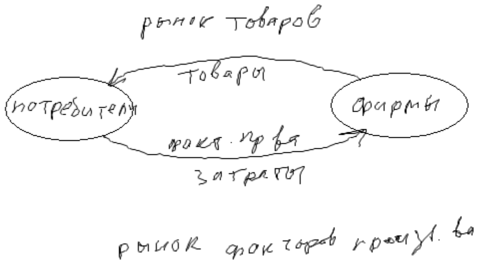
$$q = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$x_1 \geqslant 0, \qquad q > 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

решается эта задача методом множителей Лагранжа.

модель общего равновесия Вальраса

общая схема -



потребители и фирмы функционируют на двух рынках - рынок производства и рынок товаров.
в модели Вальраса считается, что ресурсы для производства берутся у потребителей.
считаем, что есть H потребителей и F фирм.
рыночное равновесие заключается в установлении такой системы цен, что:
1. фирмы получают максимальную прибыль от продажи своей продукции:

$$\Pi^f = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i^f - \sum_{i=1}^{m} w_i f_i^f \to \max_{C^f, R^f}$$

- задача максимизации прибыли фирмы с номером *f*. $f = \overline{1,F}$

где p_i - цена на i-й товар. всего n товаров. $\overline{P} = (p_1, \ldots, p_n)$

c_i^f - количество i-го товара, произведенное фирмой *f*. $\overline{C}^f = (c_1^f, \ldots, c_n^f)$.

w_i - затраты на i-й фактор производства. всего *m* факторов производства. $\overline{W} = (w_1, \ldots, w_m)$

r_i^f - количество затрат i-го вида, приобретенного фирмой *f*. $\overline{R}^f = (r_1^f, \ldots, r_m^f)$

2. потребители хотят максимизировать свою поленость:

$$\max_{\overline{C}^h, \overline{R}^h} U^h(\overline{C}^h, \overline{R}^h)$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i r_i^h + \sum_{f=1}^{F} s_h^f \Pi^f = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i^h$$

U^h - функция полезности для потребителя *h*. всего будет $h=\overline{1,H}$ задач.

w_i - стоимость затрат i-го вида, по которым их продает потребитель *h*.

r_i^h - объем затрат i-го вида, которые продает потребитель *h*. $\overline{R}^h=(r_1^h,\dots,r_m^h)$

s_h^f - доля участия потребителя *h* в прибыли фирмы *f*. $\overline{S}^h=(s_h^1,\dots,s_h^F)$

Π^f - прибыль фирмы *f*. $\Pi=(\Pi^1,\dots,\Pi^F)$

c_i^h - количество продукции i-го вида, приобретенное h-м потребителем. $\overline{C}^h=(c_1^h,\dots,c_n^h)$

второе предположение модели Вальраса - никакие деньги нигде не откладываются.

3. общий спрос на товары (на факторы производства)должен быть равен общему предложению товаров (факторов производства). т.е. все то, что выносится на продажу, должно быть куплено.

$$\sum_{h=1}^{H}c_i^h=\sum_{f=1}^{F}c_i^f, \qquad i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{h=1}^{H}r_j^h=\sum_{f=1}^{F}r_j^f, \qquad j=\overline{1,m}$$

эта модель рассматривается в условиях совершенной конкуренции (т.е. большое количество фирм на рынке).

закон Вальраса:

в узком смысле: общая величина спроса должна быть равна общей величине предложения при какой-либо системе цен.

в широком смысле: спрос не должен превышать предложение по стоимости при любых ненулевых ценах.

существование равновесной системы цен

избыточным спросом на i-й товар называется разница между спросом и предложением:

$$E_i(\overline{P})=\sum_{h=1}^{H}q_i^h(\overline{P})-\sum_{f=1}^{F}q_i^f(\overline{P}), \qquad i=\overline{1,n}$$

$$\overline{E}(\overline{P})=(E_1(\overline{P}),\dots,E_n(\overline{P}))$$

где q_i^h - план потребления i-го товара потребителем *h*;

q_i^f - количество i-го продукта, произведенное фирмой *f*.

система цен $\overline{P}^*$ называется равновесной, если имеет место неравенство $\overline{E}(\overline{P}^*)\leqslant 0$, т.е. $E_i(\overline{P}^*)\leqslant 0, \quad i=\overline{1,n}$, т.е. будет выполняться $\sum_{h=1}^{H}q_i^h(\overline{P}^*)\leqslant\sum_{f=1}^{F}q_i^f(\overline{P}^*)$ (как раз закон Вальраса в широком смысле)

модель Леонтьева. статическая модель межотраслевого баланса

рассматривается некоторая отрасль народного хозяйства. предположим, что в этой n областей (производств). считаем, что каждая из областей производит только один вид продукции, и для его производства потребляет продукцию всех других областей. эта система может быть представлена в виде межотраслевого баланса:

продукты	области производства			
	1	2	...	n
1	$\overline{a}_{11}$	$\overline{a}_{12}$	...	$\overline{a}_{1n}$
2	$\overline{a}_{21}$	$\overline{a}_{22}$	...	$\overline{a}_{2n}$
...	...	...	...	...
n	$\overline{a}_{n1}$	$\overline{a}_{n2}$	...	$\overline{a}_{nn}$

валовый выпуск	V_1	V_2	...	V_n
непроизводственное потребление	$\overline{C}_1$	$\overline{C}_2$	...	$\overline{C}_n$

в этой таблице величины $\overline{a}_{ij}$ показывают объем продукции i-й области, затрачиваемый на производство в j-й области. $i, j = \overline{1,n}$

V_j - валовый выпуск продукции j-й области за рассматриваемый период (т.е. все, что было j-й отраслью произведено).

$\overline{C}_j$ - объем продукции j-й отрасли, затраченный на непроизводственное потребление.

для таблицы должно иметь место следующее равенство (баланс):

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij} + \overline{C}_i = V_i, \qquad i = \overline{1,n}$$

$\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}$ - производство из продукции i-й области

$\overline{C}_i$ - непроизводственное потребление.

V_i - суммарный выпуск.

обычно рассматривают следующие соотношения:

$a_{ij} = \dfrac{\overline{a}_{ij}}{V_j}$ - коэффициенты прямых затрат j-й области. они показывают объем продукции i-й области, затрачиваемый на производство единицы продукции j-й области.

$A = \| a_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}}$ - матрица коэффициентов прямых затрат.

$C_j = \dfrac{\overline{C}_j}{V_j}$ - показывает долю продукции j-й области, пущенной в непроизводственное потребление.

для построения модели Леонтьева используется следующее соотношение:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j, \qquad i, j = \overline{1,n}$$

x_j - количество продукции, произведенное j-й областью.

x_{ij} показывает, сколько единиц продукции отрасли *i* необходимо затратить для производства x_j единиц продукции отрасли *j*.

$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ - показывает, сколько всего продукции i-й отрасли участвует в производстве.

модель Леонтьева имеет следующий вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + c_i, \qquad i = \overline{1,n}$$

или в матричном виде:

$$X = AX + C$$

(это - основное выражение модели Леонтьева)

решение модели Леонтьева

предполагается, что $a_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = \overline{1,n}$ (нельзя вложить отрицательное количество продукции в производство) и $c_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}$ (нельзя вложить отрицательное количество продукции в непроизводственную сферу)

т.о. решение модели, которую необходимо будет найти, также должно иметь только неотрицательные компоненты, т.е. $x_i \geqslant 0, \quad \overline{1,n}$. возможность существования неотрицательного решения определяется свойствами матрицы *A*.

матрица *A* называется <u>продуктивной</u>, если существуют векторы $C > 0, X \geqslant 0$, такие, что $X - AX = C$. продуктивность матрицы означает, что производственная система способна обеспечить некоторый положительный выпуск продукции.

условия продуктивности матрицы А:

1. последовательные главные миноры матрицы $(E-A)$ (*E* - единичная матрица) положительны, т.е.

$$\forall k=\overline{1,n} \qquad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1k} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \dots & 1-a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

2. матрица $(E-A)$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E-A)^{-1}$, все элементы которой неотрицательны.

3. матричный ряд $E+A+A^2+A^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ сходится, причем $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$

4. максимальное собственное число матрицы *А* меньше 1.

5. если сумма элементов каждой строки матрицы *А* не больше 1, и хотя бы в одной строке - строго меньше 1, то матрица *А* продуктивна.

если матрица *А* продуктивна, то по условию (2) матрица $(E-A)^{-1}$ существует и неотрицательна. поэтому, решение системы $X=AX+C$ находится следующим образом:

$X-AX=C$

$(E-A)X=C$

$X=(E-A)^{-1}C$ - нашли решение.

это решение единственно и поскольку $(E-A)^{-1}\geqslant 0$ и $C\geqslant 0$, то $X\geqslant 0$.