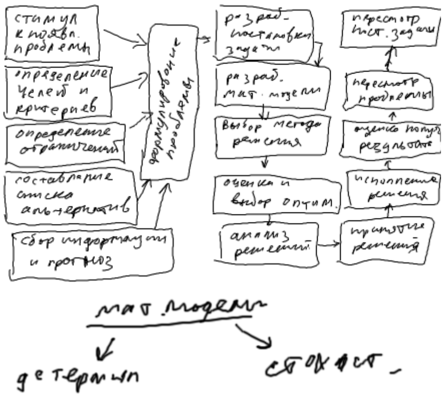
Лк №1
07.02.05

Теория принятия решений (САТО)



Лк №2
07.02.12

Формальные структуры принятия решений

пусть E_i - вариант решения некоторого вопроса. этот вариант влечет за собой результат e_i. предполагается, что множество всех вариантов E_i - конечно. $\{E_{i0}/E_{i0} < E \qquad e_{i0} = \max_i e_i\}$

E_{i0} - оптимальный вариант.

F_i - внешние условия.

$$\begin{array}{cc c}
 & \begin{array}{ccc} F_1 & \cdots & F_n \end{array} & e_{ir} \\
\begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{array} & \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{m1} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_{1r} \\ \vdots \\ e_{mr} \end{pmatrix}
\end{array}$$

критерии (оценочные функции)

1. оптимистическая оценка

$$e_{ir} = \max_j e_{ij} \qquad j = \overline{1,n}$$

$$e_{i0} = \max_i \max_j e_{ij}$$

2. позиция нейтралитета

$$e_{ir} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}$$

$$e_{i0} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right)$$

3. пессимистическая оценка

$$e_{ir} = \min_j e_{ij}$$

$$e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij}$$

4. относительный пессимизм

$$e_{ir} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right)$$

$$e_{i0} = \min_i e_{ir}$$

- минимально возможное отклонение от максимального эффекта

классический критерий принятия решений

$$E_{i0} = arg \mid \max_i \min_j e_{ij}$$

$$\max_i \min_j e_{ij} = Z_{MM}$$

$$E_{i0} = E_r$$

этим критерием можно пользоваться, если:

1. один раз принимается решение
2. неизвестны вероятности событий

2. критерий Байеса-Лапласа

$$Z_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right)$$

$$E_{i0} = argZ_{BL}$$

условия, при которых стоит применять этот критерий:

1. решения приходится принимать много раз
2. вероятности появления внешних событий не зависят от времени

критерий Севиджа

$$Z_s = \min_i e_{ir} = \min_i \left(\max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}) \right)$$

$$E_{i0} = argZ_s$$

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

- это максимально допустимый выигрыш
или максимально возможные потери.
употребляется критерий только один раз.

Лк №3
07.02.15

критерий Гурвица (HW-критерий)

$$z_{HW} = \max_i (c \min_j c_{ij} + (1-c) \max_j c_{ij})$$

$$0 \leqslant c \leqslant 1$$

условия применения этого критерия:

- вероятности условий F_j - неизвестны.
- решение применимо малое количество раз
- допускается риск

критерий Ходжа-Лемана

$$z_{HL} = \max_i e_{ir} - \max \left(v \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-v) \min_j e_{ij} \right)$$

коэффициент *v* показывает степень доверия оценкам вероятности.

$$0 \leqslant v \leqslant 1$$

p_j - вероятности; F_j - внешние условия.

критерий произведений

$$z_p = \max_i e_{ir} = \max_i \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$$

условия применения этого критерия:

- вероятности условий F_j - неизвестны.
- решение применимо малое количество раз
- допускается риск

$\forall i, j \quad e_{ij} > 0$, иначе от матрицы $\| e_{ij} \|$ переходят к матрице $\| a_{ij} \|$, где $a_{ij} = \min_{ji} e_{ij} + 1 + e_{ij}$

критерий Гермейера

$$z_G = \max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} p_j$$

смысл этого критерия - выбирается наиболее вероятная величина потерь или прибыли.

все элементы должны быть отрицательные. если не отрицательные, то осуществляется переход к матрице $\| a_{ij} \|$, $a_{ij} = e_{ij} - \max_{ij} e_{ij} - 1$

расширенный минимаксный критерий

$$e(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_i^m \sum_j^n e_{ij} p_j q_i$$

$$e(\bar{p}, \bar{q}) = \max_{\bar{q}} \min_{\bar{p}} \sum_i^m \sum_j^n e_{ij} p_j q_i$$

q_i - вероятности выбора решений.

составной критерий Байеса-Лапласа BL(MM)

$$z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}$$

$e_{i_0 j_0}$ - найденный элемент, минимальный по j, максимальный по i.

для каждой строки матрицы находится разница $e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$

далее задаем некоторую оценку допустимого риска $\varepsilon_{доп}$ (допустимые потери в случае другой ситуации, в отличие от той, которую выбрал критерий).

$I_1 = \{ i \in I \mid e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} \leqslant \varepsilon_{доп} \}$ - множество согласия.

выигрышное множество:

$$I_2 = \{i \in I \mid \max_j e_{ij} - \min_j e_{i_0 j} \geqslant \varepsilon_i\}$$

пусть $\max_j e_{ij} - \min_j e_{i_0 j} = \Delta_i$

справа от матрицы $\| e_{ij} \|$ пишем 3 столбца: ε_i, Δ_i, e_{ir}

$$e_{ir} = \sum_j^n e_{ij} p_j$$

$$E_0 = arg \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j$$

условия применения критерия:

- вероятности F_j - неизвестны, но есть их оценка
- критерий можно использовать много раз
- допускается ограниченный риск

составной критерий Байеса-Лапласа-Севиджа BL(S)

$$z_S = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$a_{ij} = \max_j a_{ij} - e_{ij}$$

$$I_1 = \{i \in I \mid \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} \leqslant \varepsilon_{\text{доп}}\}$$

$$\varepsilon_i = \max_j a_{ij} - a i_0 j_0$$

$$I_2 = \{i \in I \mid \max_j a_{i_0 j} - \min_j a_{ij} \geqslant \varepsilon_i\}$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$$

пример:

$$\begin{array}{cc} E_1 & \multirow{3}{*}{} \\ E_2 & \\ E_3 & \end{array} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array}$$

$$p = \quad (0.01 \quad 0.49 \quad 0.5)$$

MM - 2 z=4
BL - 1 z=4.02
S - 1 z=1
HW - 2 z=4.5
HL - 2 z=4.002
P - 1 z=45
G - 1 z=0.05
BL(MM) - 2 z=4.01
BL(S) - 1 z=0.49

Лк №4
07.02.19

доверительные факторы

пусть у нас есть наблюдения некоторого фактора - $x_1, x_2, \dots, x_j$.

1. эмпирический доверительный фактор. таким фактором пользуются тогда, когда известна выборка. ее объем - v. обозначение - $V_\nu(\alpha)$

$x_1 < x_2 < \dots$ - предположим, что все значения отсортированы. тогда эмпирический доверительный фактор можно посчитать следующим образом:

$$V_\nu(\alpha) = \frac{\tilde{M}_\nu(\alpha) - x_1}{M_\nu - x_1}$$

$\tilde{M}_\nu(\alpha)$ - наиболее неблагоприятное.

$$\tilde{M}_\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_{\nu i}(\alpha)$$

/* ну это все нафиг :)) от доски отсвечивает, ничего не видно.. тем более будут электронные варианты лекций */

$F(m_1, m_2, \varepsilon)$ - квантиль биномиального распределения

эти формулы /* которые я не записал ;-P */ справедливы, когда объем выборки меньше чем 30 значений. в случае, когда объем выборки превышает 30 значений, пользуются другими формулами:

$$\breve{p}_1 = \frac{1}{\nu + z_{1-\alpha}^2}\left(k_1 + \frac{z_{1-\alpha}^2}{2} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{k_1(\nu - k_1)}{\nu} + \frac{z_{1-\alpha}^2}{4}}\right)$$

$z_{1-\alpha}$ - табличное значение норм

$$\breve{p}_j, \hat{p}_j = \frac{1}{\nu + z_{1-\alpha}^2}\left(k_j + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{2} \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{k_j(\nu - k_j)}{\nu} + \frac{z_{1-\alpha}^2}{4}}\right) \qquad (2)$$

2. когда известны некоторые теоретические вероятности и имеется некоторое количество w экспериментов (подвыборка из общей выборки). в таком случае этот фактор называется прогностическим (ПДФ). обозначение - $V^w(\alpha)$.

$$V^w(\alpha) = \frac{\tilde{M}^w(\alpha) - x_1}{\mu - x_1} \qquad (4)$$

$\mu = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ - мат.ожидание

$$\tilde{M}^w(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j(\alpha) x_j$$

если экспериментов из общей выборки больше 30 ($w \geqslant 30$), то подсчет ведется по следующим формулам:

$$\tilde{h}_1^w(\alpha) = p_1 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{w}} \qquad (6)$$

$$\breve{h}_1(\alpha) = p_j + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_j(1-p_j)}{w}}$$

$$\hat{h}_1(\alpha) = p_j + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_j(1-p_j)}{w}}$$

$$\tilde{h}_1(\alpha) = \breve{h}_1^w(\alpha)$$

$$\tilde{h}_j^w(\alpha) = \min\left(\max\left\{0{,}1 - \sum_{i=1}^{j-1}\tilde{h}_i^w(\alpha) - \sum_{i=j+1}^{n}\breve{h}_j^w(\alpha)\right\}, \hat{h}_j^w(\alpha)\right)$$

$$\tilde{h}_n^w(\alpha) = \max\left\{0{,}1 - \sum_{i=1}^{n-1}\tilde{h}_i^w(\alpha)\right\}$$

$$V^w(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j^w (x_j - x_1)}{\sum_{j=1}^{n} p_j (x_j - x_1)}$$

3. планируется проведение w экспериментов и есть выборка v. в таком случае используется эмпирико-прогностический фактор (ЭПДФ). обозначение - $V_\nu^w(\alpha)$.

$$V^w(\alpha) = \frac{\tilde{M}_\nu^w(\alpha) - x_1}{M_\nu - x_1} \qquad (9)$$

$$M_\nu = \sum_{j=1}^{n} h_j x_j$$

$$x_1 = \min_j x_j$$

$$M_\nu^w(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_{\nu j}^w(\alpha) x_j$$

если v и w - малые:

$$\breve{p}_1 = \frac{(k_1+1)F(m_1, m_2, \varepsilon)}{\nu - k_1 + (k_1+1)F(m_1, m_2, \varepsilon)}$$

$$m_1 = 2(k_1+1)$$

$$m_2 = 2(\nu - k_1)$$

если v и w - большие:

$$\breve{h}_\nu^w(\alpha) = \breve{p}_1 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\breve{p}_1(1-\breve{p}_1)}{w}}$$

$$\tilde{h}_{\nu j}^w(\alpha) = \breve{p}_j + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\breve{p}_1(1-\breve{p}_1)}{w}}$$

$$\tilde{h}_{\nu 1}^w(\alpha = \breve{h}_{\nu 1}^w(\alpha))$$

$$\tilde{h}_{\nu j}^w(\alpha) = \min\left(\max\left\{0{,}1 - \sum_{i=1}^{j-1} \breve{h}_{\nu i}^w(\alpha) + \sum_{i=j+1}^{n} \hat{h}_{\nu i}^w(\alpha)\right\}, \hat{h}_{\nu j}^w(\alpha)\right)$$

использование факторов при принятии решений

$$Z_{HL} = \max_i \left(u_i \sum_{j=1}^{n} h_j e_{ij} + (1-u_i)\min_j e_{ij}\right)$$

Лк №5
07.02.26

расчет опорных величин для оценки риска. принятие решений при наличии риска

степень неоптимальности - отклонение..

$$\varepsilon_{i\ \text{возм}} = Z_{MM} - \min_j e_{ij}$$

$\varepsilon_{i\ \text{возм}}$ - дефект варианта ε_i.

максимальный риск:

$$\varepsilon_{\text{возм}} = \max_i (Z_{MM} - \min_j e_{ij}) = -\max_i \min_j e_{ij} + \min_i \min_j e_{ij} = Z_{MM} - \max_i \min_j e_{ij}$$

(максимальное отклонение в случае выбора неоптимального варианта)

$$Z^*_{HL} = \max_i (u \sum_{j=1}^{n} e_{ij} h_j + (1-u) \min_j e_{ij})$$

в качестве *u* будем использовать один из факторов: $u = V_\nu^\omega$

$$V_\nu^\omega = \begin{cases} 1, & \nu \to \infty, \omega \to \infty \\ 0, & \nu \to 0 \\ 0, & \omega \to \end{cases}$$

v - сколько раз мы уже принимали решение в данной отрасли при данной матрице результатов.

$$\min_j e_{ij} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = \min(\varepsilon_{i\ \text{возм}}, \varepsilon_{\text{доп}})$$

$$\varepsilon_{\text{возм}} = \max_i \varepsilon_i = \max_i \min(\varepsilon_{i\ \text{возм}}, \varepsilon_{\text{доп}})$$

$$Z^*_{HL} = \max_i (V^\omega_{\nu i}(\alpha) \sum_{j=1}^{n} e_{ij} h_j + (1 - V^\omega_{\nu i}(\alpha)) \min_j (e_{ij} + \varepsilon_i))$$

- если $\varepsilon_i = 0$, получаем классический случай Ходжа-Лемана.
- $\varepsilon_{\text{доп}} > \varepsilon_{i\ \text{возм}} \Rightarrow$ BL
- $\nu = 0$ - выборки нет

гибкий критерий

основная оценочная функция этого критерия -

$$\max_{E_i \in E_0} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} h_j$$

$$E_0 = \{E_i \mid G_1 \wedge (G_2 \vee G_3) \wedge G_4 \wedge G_5\}$$

$G_1 \qquad E_i \in E$ - множество всех вариантов решений

$G_2 : V_i(\alpha) = V_{\text{доп}} \qquad V_\nu(\alpha), V_\nu^\omega(\alpha), V^\omega(\alpha)$

$G_3 \qquad Z_{MM} - \min_j e_{ij} \leqslant \varepsilon_{i\ \text{доп}}$

$$G_4 : Z_r = \max_i V_i(\alpha) \sum_{j=1}^{n} e_{ij} h_j + (1 - V_i(\alpha)) \min_j (e_{ij} \varepsilon_i)$$

$$G_5 : \max_{i \in E_i \in E_0} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} h_j$$

гибкий критерий целесообразно применять тогда, когда затраты на сбор данных или же попытки решения данной задачи значительно меньше, чем величина возможного выигрыша.

$$r = P\{C(\omega, x) > K\} \to \min_{k \in \Omega}$$

r - риск

разные подходы:

$M\{C(\omega, x)\} \to \min_{x \in \Omega}$ (или max)

$$\Omega : \qquad \{P(f(x, \omega) > b) \leqslant \alpha\} \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \qquad \{P(C(\omega, x) > K) \leqslant \alpha\}$$

теория экономического риска

$$(f(x,\omega)-\bar{f}(x,\omega))^2 \to \min_{x\in\Omega}$$

$r=\sum_{i=1}^{n} r_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{H_{\max i}}{K_i}$ - отношение максимально возможных потерь к количеству средств, которыми можно было бы погасить эти потери

Лк №6
07.03.05

/* сорри, сегодня конспекта не будет - стадо рисунков в лекции намертво убили мой текстовый редактор вместе с конспектом - не хватило памяти :)) */

алгоритм выбора пути в дереве решений:

1. маркируют все варианты решений каждого этапа. все действия, которые встречаются на пути от исходного узла до его конца образуют вариант решения.
2. учитывают все случайные события отдельного этапа. все лежащие на пути до конца каждого этапа случайные события характеризуют внешние состояния. получаемые на каждом этапе результаты учитывают с помощью матриц решений.

матрица решений для первого этапа:
пути выписывают последовательно.
путь 1:

$d_{11}=E_1$

$F_1=\varnothing$

$e_{11}=c_1$

путь 2:

$(d_{12},d_{21})=E_2$

$F_2=f_{31}$

$e_{22}=c_2$

путь 3:

$(d_{12},d_{21})=E_2$

$F_3=f_{32}$

$e_{23}=c_3$

путь 4:

$(d_{12},d_{22})=E_3$

$F_4=f_{41}$

$e_{34}=c_4$

$\ldots$

- выписать все пути до конечного результата, которые соответствуют первому этапу.
на основании их составляется матрица и обрабатывается некоторым критерием.
путь 7:

$d_{13}=E_7$

$F_7=f_{12}$

$e_{47}=\left\|e_{ij}\right\|$ - из II этапа.